توانا بود هر که دانا بود

کتاب مثلثات

سال چهارم دبیرستانها

تألیف

جناب آقای محمد وحید

آقای تقی فاطمی استاد دانشگاه

۱۳۲۲

چاپخانه سیروس تهران

مثلثات

مقدمه و تعریف

۱ـ گشودن سه گوشه ها - در هندسه دیده ایم که مجموع گوشه های یک سه گوشه برابر با دو گوشهٔ راست است . بنابرین هرگاه دو گوشه از یک سه گوشه داده شده باشد سومی معین است .

پس میتوان برای هر سه گوشه فقط پنج جزء در نظر گرفت : سه پهلو و دو گوشه - و در هندسه سال ۹ قم (از صفحه ۳۴ تا ۴۱) ثابت شده که هرگاه سه جزء از این پنج جزء داده شود میتوان سه گوشه را کشید (در حالت کلی) و پس از کشیدن سه گوشه میتوان جزء های داده نشده را اندازه گرفت - در اینصورت گوئیم سه گوشه از راه هندسی گشوده شده است

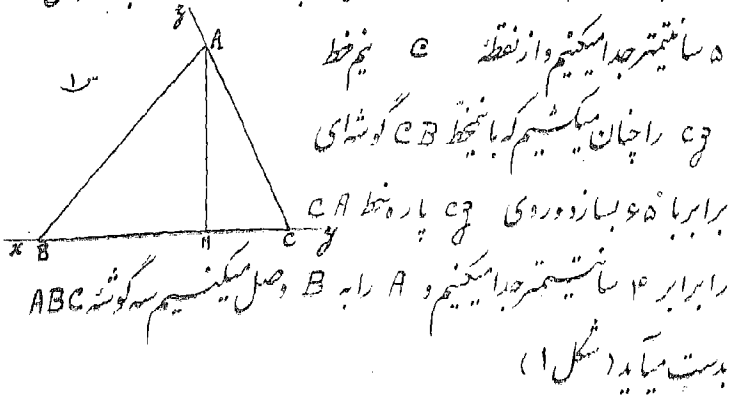
مثال - از یک سه گوشه دو پهلو و گوشهٔ میان آنها در دست است :

$a = 5$ سانتیمتر $\quad b = 3$ سانتیمتر $\quad \hat{C} = 65$

آنرا بگشائید .

(قرار براین میگذاریم که در سه گوشه ABC پهلوی روبروی تارک A را a و پهلوهای روبری B و C را بترتیب b و c نامیده و گوشه ها را هم بنام تارک ها بنامیم)

برای گشودن سه گوشه نخست آنرا از روی جزءهای داده شده میکشیم و از روی شکل جزءهای دیگر را اندازه میگیریم

برای کشیدن سه گوشه روی خط xy پاره خط BC را بدرازای ۵ سانتیمتر جدا میکنیم و از نقطه C نیم خط Cz را چنان میکشیم که با نیم خط CB گوشه ای برابر با ۶۵ بسازد و روی Cz پاره خط CA را برابر ۴ سانتیمتر جدا میکنیم و A را به B وصل میکنیم سه گوشه ABC بدست میآید (شکل ۱)

حال گوشه های A و B را با نقاله و درازای پهلوی AB را با ستاره اندازه میگیریم تقریباً چنین میشود:

$c = AB = ۴٫۹$ سانتیمتر و $A = ۶۷^\circ ۳۰'$ و $B = ۴۷^\circ ۳۰'$

یک امتحان درستی شکل و عمل این است که سه گوشه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ رویهم برابر دو گوشه راست باشند.

تبصره - این عددها که برای یاشناسها بدست آوردیم کاملاً درست نیست و تقریبی است
زیرا با نقاله تنها میتوان گوشه را تا نیم زینه (درجه) تقریباً معین کرد و با ستاره
هم اندازهٔ AB تنها تا نیم میلی متر تقریباً معین میشود

ولی در مسئله های دیگر ممکن است در موقع کشیدن شکل هم تقریب هائی
لازم باشد و در نتیجه شکلی که بدست میآید کاملاً مانند شکل اصلی نباشد

فرض کنیم در مثال بالا بجای عددهای سادهٔ داده شده عددهای زیر را
میدادند: $a = ۴۲.۰۵$ متر و $b = ۳۲.۰۴$ متر $، \hat{c} = ۶۵° ۱۰'$
برای اینکه بتوانیم شکل را در روی کاغذ بکشیم باید اندازهٔ پهلوهای a و b را
کوچک نمود مثلاً اگر هر هزار متر را با یک سانتیمتر نمایش دهیم بایستی سه گوشه ای
بسازیم که پهلوهای آن یکی ۵٫۰۴۲ سانتیمتر و دیگر ۴٫۰۳۲ سانتیمتر باشد - ولی
چون با افزارهائی که در دست است کشیدن درازاهای کمتر از میلی متر روی کاغذ
آسان نیست از سدهم سانتیمتر یا میلیمتر چشم میپوشیم و a و b را بترتیب با ۵ و ۴
سانتیمتر نمایش میدهیم .

همچنین چون با نقاله نمیتوان کمتر از نیم زینه را بدرستی روی کاغذ برد
از ۱۰ دقیقه نیز چشم پوشیده $\hat{c}$ را ۶۵° میگیریم .
در نتیجه شکل (۱) بدست میاید .

واگر این سه گوشه زمینی باشد که هر متر مربع آن ده دینار بیرزد (هکتاری ۱۰۰۰ ریال) برای بدست آوردن ارزش زمین بایستی پهنهٔ آن را معین کنیم و برای این منظور کافی است مثلاً درازای AH را بدانیم (زیرا درازای BC داده شده است) و AH را از روی شکل (۱) که بدقت کشیده شده اندازه میگیریم تقریباً ۶٫۳ سانتی متر است که نمایش ۳۶۰۰ متر باشد. پس پهنهٔ زمین از روی شکل چنین است:

$$\frac{1}{2}\, a \times AH = \frac{1}{2} \times ۵۰۴۳ \times ۳۶۰۰ = ۹۰۷۷۴۰۰$$ متر مربع

و ارزش آن بنابرین ۹۰۷۷۴۰ ریال خواهد بود.

ولی از راه محاسبهٔ دقیق مثلثاتی (چنانکه درین کتاب خواهیم دید) معلوم میشود که پهنهٔ سه گوشهٔ داده شده ۹۳۴۱۰۰۰ متر مربع و بنابرین ارزش آن ۹۳۴۱۰۰ ریال است یعنی میان دو نتیجه (محاسبهٔ دقیق و آنچه از روی گشایش هندسی بدست آمده) ۲۶۳۶۰ ریال تفاوت است.

این تفاوت در نتیجهٔ تقریبهائیست که در کشیدن شکل و اندازه گیریها نمودیم. و اگر گوشهٔ C خیلی کوچک مثلاً ده پانزده دقیقه میبود باز تفاوت زیاد میشد.

موضوع علم مثلثات مقدماتی آموختن راه گشودن سه گوشه‌ها است از راه محاسبهٔ دقیق یعنی حساب کردن جزءهای ناشناس آنها است از روی ...

جزءهای داده شده .

ورزش و پرسش

پرسش - غرض از گشودن سه گوشه چیست ؟

۱- سه برهای راست گوشهٔ زیر را از راه هندسی بگشائید (گوشهٔ راست را C مینامیم) :

c = ۷ متر ، A = ۱۵°

b = ۲۰ متر ، B = ۵۰°

a = ۵ سانتیمتر ، B = ۶۵°

c = ۰٫۵۷ سانتیمتر ، a = ۰٫۳۵ سانتیمتر

b = ۲٫۷ کیلومتر ، a = ۴٫۲ کیلومتر

۲- سه برهای زیر را از راه هندسی بگشائید

B = ۷۵° ۳۰′ ، Â = ۴۰° ، a = ۱۸ متر

Ĉ = ۴۴° ۳۰′ ، Â = ۲۶° ، b = ۶۷ متر

B = ۴۱° ، c = ۳۳ میلیمتر ، a = ۶۷ میلیمتر

A = ۷۰° ، c = ۴۵ سانتیمتر ، b = ۱۵ سانتیمتر

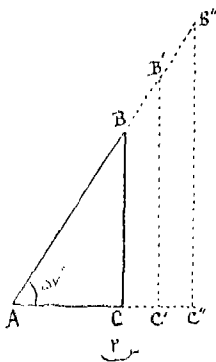
a = ۳ کیلومتر ، b = ۴۵۰ متر ، c = ۴٫۳ کیلومتر

a = ۵٫۶ متر ، b = ۴٫۴ متر ، c = ۸٫۹ متر

$A = ۱۰۵°$ $a = ۷,۴$ متر $b = ۳,۴$ متر

$C = ۹۵°$ $c = ۲$ متر $b = ۳$ متر

$A = ۲۱°$ $b = ۶۱$ متر $a = ۵۲$ متر

۲- عددهائیکه بستگی به گوشه ها دارند- فرض کنیم در سه بر راست گوشه ACB که در آن گوشهٔ C راست است (ش ۲) گوشهٔ A برابر با ۵۷° و پهلوی AC برابر با ۳ یکهٔ درازا (مثلاً سانتیمتر) باشد- اگر این سه بر را بدقت کشیده BC را اندازه بگیریم خواهیم داشت:

BC = ۴,۶ سانتیمتر

حال اگر بدون اینکه بگوشهٔ A دست بزنیم AC را برابر با ۴ سانتیمتر یا ۵ سانتیمتر بگیریم نسبتی که C بوضع C′ یا C″ درآید و مانند پیش B′C′ و B″C″ را اندازه بگیریم خواهیم داشت: B′C′ = ۶,۱۵ سانتیمتر B″C″ = ۷,۷ سانتیمتر

از روی این اندازه ها دیده میشود که در هر مورد نسبت درازای BC بدرازای AC یک عددی است پایا (ثابت):

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = ۱,۵۴۶$$

(پایا بودن این نسبتها از راه هندسی نیز روشن است)

پس نسبت $\frac{BC}{AC}$ عددی است که بستگی به درازای پهلوهای سه بر ندارد (زیرا با تغییر کردن آنها تغییر نمیکند) و فقط بستگی دارد به گوشه A (یا B که متمم آنست)

همچنین است نسبتهای $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{BC}{AB}$ که بستگی به گوشه A (یا B) دارند و به درازای پهلوها بستگی ندارند

ورزش - گوشه A را بترتیب برابر ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° گرفته نسبتهای $\frac{BC}{AC}$ و $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{BC}{AB}$ را در هر مورد معین کنید.

تعریف - مثلثات مقدماتی علمی است که در آن از عددها و نسبتهائی که تنها بستگی به گوشه دارند بحث میشود و بوسیله آن میتوان سه گوشه ها را از راه محاسبه گشود

پرسش های ساده

۱- در یکی از ساعتهای روز سایه درختی ۱۵ متر و سایه یک تکه چوب شاغولی دو متری سه متر بود - درازای درخت چقدر است!

۲- بلندی دیواری سه متر است و نزدیک آن دیوار درختی است به بلندی پنج متر - وقتی سایه درخت چهار متر میشود سایه دیوار چه اندازه خواهد بود؟

بخش نخست

۱- یکه های کمان و گوشه

۳- یکه های کمان - برای اندازه گرفتن کمانهای دایره یکه های چند بکار میبرند:

الف - زینه (درجه) - و آن $\frac{1}{۳۶۰}$ پیرامون دایره است یعنی کمانی است که ۳۶۰ مرتبه در پیرامون دایره می گنجد.

جزءهای زینه دقیقه است و ثانیه:

دقیقه برابر $\frac{1}{۶۰}$ زینه و ثانیه برابر $\frac{1}{۶۰}$ دقیقه است پس ثانیه برابر $\frac{1}{۶۰ \times ۶۰} = \frac{1}{۳۶۰۰}$ زینه است - اندازه پاره های کمان را که از ثانیه کوچکتر باشند با دهگان ثانیه نمایش میدهند.

اگر اندازه کمانی از یک دایره ۱۲ زینه و ۱۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه و ۳ دهم ثانیه باشد آنرا چنین مینویسند:

$$۱۲^\circ \; ۱۵' \; ۴۵'',۳$$

تبصره - بنابر آنچه گفتیم اگر روی پیرامون دایره O کمان AB برابر $\frac{1}{۳۶۰}$ پیرامون و بنابرین یک زینه باشد این کمان یکه کمانهای این دایره است.

حال اگر دائرهٔ دیگری بکشیم که پرتوش نیمهٔ پرتو دائرهٔ O باشد و در آن دائره کمان $A'B'$ برابر یک زینه باشد دیده میشود که درازای AB با درازای $A'B'$ تفاوت دارد (چرا ؟)

بنابرین روی دائره های مختلف کمانهائیکه بحسب زینه برابرند بحسب درازا برابر نیستند و درازای آنها (چنانکه در هندسه ثابت میشود) متناسب است با پرتو آن دائره ها (در مورد دو دائرهٔ بالا $\widehat{AB}=2\,\widehat{A'B'}$)

پس درازای کمان بستگی دارد هم بشمارهٔ زینه های آن و هم به درازای پرتو دائره ایکه آن کمان پاره ای از آن است

اگر l درازا و n اندازهٔ کمان بحسب زینه (و یا شمارهٔ زینه های آن) و r درازای پرتو دائره باشد (l و r هر دو بحسب یک یکهٔ درازا) داریم:

$$(1) \qquad l = \frac{2\pi r n}{360} = \frac{\pi r n}{180}$$

ب - گراد (۱) و آن کمانیست برابر $\frac{1}{400}$ پیرامون دائره - جزء های آن دقیقه است (دقیقهٔ سد قسمتی) که یکصدم گراد باشد و ثانیهٔ سد قسمتی که $\frac{1}{100}$ دقیقهٔ سد قسمتی و یا $\frac{1}{10000}$ گراد است.

---

(1) Grade

۱۸ گراد و ۵ دقیقه و ۳۷ ثانیه را چنین نویسند

$$۱۸^{g} \quad ۵' \quad ۳۷''$$

و یا

$$۱۸^{g},۰۵۳۷$$

چنانکه دیده میشود هرگاه کمانی با گراد و جزءهای گراد سنجیده شود اندازهٔ آن با یک عدد دهی نموده میشود درصورتیکه اگر با زینه و جزءهای زینه سنجیده شود اندازهٔ آن یک عدد دهی نیست.

مانند پیش اگر ح درازا و ز اندازه کمان بحسب گراد و ر درازای پرتو دایره باشد داریم:

$$(۲) \qquad ح = \frac{۲\pi ر ز}{۴۰۰} = \frac{\pi ز ر}{۲۰۰}$$

ج - راد یان[1] - زینه و گراد برای محاسبه‌های عددی بکار برده میشود ولی در ثابت کردن قضیه‌ها و بیشتر در دستورهای مثلثاتی کمان دیگری بکار میبرند بنام رادیان (یعنی کمانی برابر پرتو) و آن کمانی است از دایره که درازایش برابر پرتو دایره است یعنی اگر درازای پرتو دایره‌ای مثلاً دو متر باشد درین دایره رادیان کمانی است بدرازای دو متر.

در هندسه ثابت میشود که نسبت درازای پیرامون هر دایره به پرتو

(1) Radian

آن عددیست کنک ۲π (......۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ π[1])

بعبارت دیگر درازای پیرامون دایره بحسب رادیان برابر ۲π است پس نیمهٔ پیرامون π رادیان است و چهار یک آن $\frac{\pi}{4}$ رادیان.

اگر l درازا و α اندازهٔ کمان بحسب رادیان و r پرتو دایره باشد خواهیم داشت:

$$l = \frac{2\pi r\alpha}{2\pi} = r\alpha \qquad (3)$$

(این بستگی مانند بستگیهای (۱) و (۲) چنین بدست میآید که بنویسیم نسبت درازای کمان به درازای پیرامون دایره برابر نسبت اندازه‌های آنهاست بحسب یک یکه)

ورزش

۱ـ درازای پرتو دایره‌ای ۵ متر است حساب کنید درازای کمانهائی از این دایره را که اندازهٔ آنها ۴۵° یا ۴۷ گراد و یا $\frac{2}{3}$ رادیان است،

۲ـ درازای پرتو دایره را حساب کنید هرگاه

---

(۱) در بیشتر جاها کافی است π را برابر ۳٫۱۴۱۶ و یا ۳٫۱۴ بگیریم ـ برخی $\frac{355}{113}$ دهگان π را تا شش پیکر و $\frac{22}{7}$ آنرا تا دو پیکر درست میدهد.

الف - درازای کمان ۲۵° یک متر باشد .

ب - کمان ۴۵ گراد دو متر و نیم باشد .

ج - کمان یک رادیان سه متر باشد .

۴ - یکه های گوشه - در هندسه ثابت شده است که اندازهٔ گوشهٔ مرکزی (گوشه ای که تارکش در مرکز دایره است) همانا اندازهٔ کمان روبروی آن است بشرط آنکه یکهٔ گوشه گوشه ای باشد مرکزی روبرو به یکهٔ کمان - ازین رو یکه هائی را که برای اندازه گرفتن گوشه بکار میبرند بهمان نام یکه های کمان مینامند :

الف - در دستگاه شست قسمتی (زینه) یکهٔ گوشه زینه است و آن گوشه ایست مرکزی روبرو بکمانیکه برابر یک زینه باشد و چون یک گوشهٔ راست مرکزی روبرو بکمانی است برابر چهاریک پیرامون دایره و یا برابر ۹۰ زینه پس میتوان نیز گفت که زینه یک نودم ($\frac{1}{90}$) یک گوشهٔ راست است .

دقیقه و ثانیه بهمین ترتیب تعریف میشود .

ب - در دستگاه دهی یکهٔ گوشه گراد است و آن گوشه ایست مرکزی روبرو بکمانی یک گرادی و یا $\frac{1}{100}$ گوشهٔ راست است .

ج - رادیان گوشه ایست مرکزی روبرو به کمانی برابر پرتو (یعنی کمانی که درازایش برابر درازای پرتو است و یا کمانی یک رادیانی)

بنابر آنچه گفته شد میتوان از این پس بدون اینکه ابهامی باشد بجای گوشه کمان در نظر گرفت وبعکس مثلا میتوان بجای یک کمان ده زینه گوشه ده زینه در نظر گرفت یعنی گوشه ای مرکزی روبروی آن کمان وبعکس .

۵ - تبدیل یکه - هرگاه اندازه گوشه ای (یا کمانی) بحسب یکی از یکه ها در دست باشد وبخواهیم اندازه آن را بحسب یکی دیگر از یکه ها بشناسیم بهتر این است که نخست آن گوشه را (یا آن کمان را) با یک گوشه راست (ویا با چهاریک پیرامون دایره) بسنجیم وسپس آن را تبدیل کنیم :

مسئله ۱ - اندازه گوشه ۹۷٫۵۳۴۵ گراد را بحسب زینه بدست آورید

چون گوشه راست ۱۰۰ گراد است پس این گوشه ۰٫۹۷۵۳۴۵ گوشه راست است حال چون گوشه راست ۹۰ زینه است پس این گوشه برابر با

۹۰ × ۰٫۹۷۵۳۴۵ = ۸۷٫۷۸۱۰۵۰ زینه است

ولی ۰٫۷۸۱۰۵ زینه = ۶۰ × ۰٫۷۸۱۰۵ دقیقه یا ۴۶٫۸۶۳ دقیقه

و ۰٫۸۶۳ دقیقه = ۶۰ × ۰٫۸۶۳ ثانیه = ۵۱٫۷۸ ثانیه است

بنابراین

۹۷٫۵۳۴۵ گراد = ۸۷° ۴۶′ ۵۱″٫۷۸

مسئله ۲ - گوشه ۸۷° ۴۶′ ۵۱″٫۷۸ را به گراد تبدیل کنید .

۷۸ ر۵۱ً برابراست با $\frac{۵۱٫۷۸}{۶۰}$ دقیقه = ۸۶۳ ر۰ دقیقه

۴۶ً۸۶۳ برابراست با $\frac{۴۶٫۸۶۳}{۶۰}$ زنیه = ۷۸۱۰۵ ر۰ زنیه

$۸۷٫۷۸۱۰۵ = \frac{۸۷٫۷۸۱۰۵}{۹۰}$ گوشهٔ راست = ۹۷۵۳۴۵ ر۰ گوشهٔ راست

و ۹۷۵۳۴۵ ر۰ گوشهٔ راست برابراست با ۹۷٫۵۳۴۵ گراد .

مسئلهٔ ۳- همین گوشه را با رادیان بسنجید .

گوئیم این گوشه برابراست با ۹۷۵۳۴۵ ر۰ گوشهٔ راست و چون هر گوشهٔ راست برابراست با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان پس این گوشه $۰٫۹۷۵۳۴۵ \times \frac{\pi}{۲}$ رادیان یا تقریباً ۵۴۲ ر۱ رادیان است :

۵۱٫۷۸ ً۴۶ ۸۷° = ۹۷٫۵۳۴۵ گراد = ۱٫۵۴۲ رادیان

مسئلهٔ ۴- کمان $\frac{۷\pi}{۱۱}$ رادیان را با گراد یا با زنیه بسنجید .

گوئیم $\frac{\pi}{۲}$ رادیان ۱۰۰ گراد است پس یک رادیان $\frac{۲۰۰}{\pi}$ گراد است و $\frac{۷\pi}{۱۱}$ رادیان برابر با $\frac{۲۰۰}{\pi} \times \frac{۷\pi}{۱۱}$ گراد = $\frac{۱۴۰۰}{۱۱}$ گراد و یا ۱۲۷٫۲۷۲۷۰۰ گراد است

$\frac{۷\pi}{۱۱}$ رادیان = ۱۲۷٫۲۷ ...... گراد

برای تبدیل به زنیه گوئیم $\frac{\pi}{۲}$ رادیان ۹۰ زنیه است پس یک رادیان $\frac{۱۸۰}{\pi}$ زنیه است و $\frac{۷\pi}{۱۱}$ رادیان برابر با $\frac{۱۸۰}{\pi} \times \frac{۷\pi}{۱۱}$ زنیه = $\frac{۱۲۶۰}{۱۱}$ زنیه

$= 114{,}5454...$ زینه است و باید اینجا دهگان زینه را بدقیقه و ثانیه مبدل شود :

$0{,}5454...$ زینه برابر است با $0{,}5454... \times 60$ دقیقه و یا $32{,}7272...$ دقیقه

و $0{,}7272...$ دقیقه $= 0{,}7272... \times 60$ ثانیه و یا $43{,}6363...$ ثانیه

پس $\frac{7\pi}{11}$ رادیان $= 114^\circ\ 32'\ 43''{,}6363...$

۶ - در ضمن گشودن مسئله ۴ دیده شد که :

$$1 \text{ رادیان} = \frac{180}{\pi} \text{ زینه} = 57^\circ\ 17'\ 44''{,}8$$

$$1 \text{ رادیان} = \frac{200}{\pi} \text{ گراد} = 63^g{,}66198$$

چون π عددیست گنگ (جبر سوم ۱۴) این دو عدد هر دو تقریبی است .

۷ - دستور کلی برای تبدیل کیه - اگر اندازه های یک کمان بحسب رادیان و زینه و گراد بترتیب α و n و n' باشد و درازای این کمان را که از روی دستورهای (۱) و (۲) و (۳) بدست میاید باهم بسنجیم خواهیم داشت :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{n}{180} = \frac{n'}{200} \qquad (4)$$

از روی وابستگی (۴) هرگونه مسئله تبدیل کیه را میتوان گشود : مثلاً اگر α یعنی اندازه کمانی (یا گوشه ای) را بحسب رادیان بشناسیم بنا به (۴) n یعنی

شمارهٔ زینه های آن چنین خواهد بود :

$$n = \frac{180}{\pi} \alpha$$

این عدد n که باین ترتیب بدست میآید برابر شمارهٔ زینه های کمان است و دهگان این عدد را باید به دقیقه و ثانیه تبدیل نمود .

ورزش

۱- یک زینه و یک گراد را بحسب رادیان حساب کنید .

۲- اندازهٔ گوشه های زیر را بحسب زینه بدست آورید :

۳٫۴ رادیان ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{5}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{8}$

۲۹^{g}٫۳۵۰۶ ، ۱۵۰^{g} ، ۱۸^{g} ، ۷۶^{g}٫۷۸۵۶

۳- اندازهٔ گوشه ها (یا کمانهای) زیر بحسب رادیان چیست ؟

۳۰$^{\circ}$ ، ۴۵$^{\circ}$ ، ۶۰$^{\circ}$ ، ۷۵$^{\circ}$ ، ۹۰$^{\circ}$ ، ۲۲$^{\circ}$۳۰$'$

۱۲$^{\circ}$ ۳۴$'$ ، ۵۰^{g} ، ۷۵^{g} ، ۷۸^{g}٫۸۷۹۵

۴- $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{3}{2}\pi$ رادیان هریک برابر چند گوشهٔ راست میباشند؟

۵- درمدت ۳۶ دقیقه هریک از عقربک های ساعت چند رادیان میگردند؟

۶- میان بر (قطر) چرخ جلوی درشکهای یکمتر و میان بر چرخ عقب آن ۱۲۰

سانتیمتر است - وقتی چرخ جلو ۷۰۰ می گردد چرخ عقب چند رادیان خواهد گشت؟

۷- دریک شبانه روز زمین چند رادیان گرد آسه خود میگردد؟

۸- چرخی ۳۰۰۰ دور دریک ساعت میگردد دریک ثانیه چند رادیان میگردد؟ (یعنی تندی گردش آن چند رادیان در ثانیه است؟)

۹- تندی گردش چرخی ۳ رادیان در ثانیه است - دریک ساعت چند دور خواهد زد؟

۱۰- درازای زینه های نقاله ای یک میلی متر است درازای پرتو نقاله چقدر است؟

۱۱- حساب کنید مسافتی را که یکی از نقطه های خط استوا می پیماید در مدتیکه زمین یک رادیان میگردد - درهمین مدت یکی از نقطه هائی که درعرض ۴۵° قرار دارد چه مسافتی خواهد پیمود؟

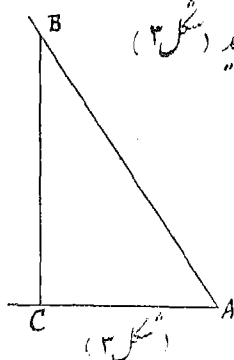
۱۲- دایره ایست به پرتو ۵ متر چقدر است اندازه کمانی ازین دایره (بحسب زینه) که درازای آن ۶ متر میباشد؟

۱۳- تندی گردش چرخی هفت دو در ثانیه است درچه مدت ۶ رادیان میگردد؟

۱۴- ترنی باتندی ۵۰ کیلومتر در ساعت روی کمانی از دایره که پرتو آن ۳ کیلو متر است حرکت دارد - در مدت ۲۵ ثانیه چند زینه می گردد؟

۲- پردازش های مثلثاتی گوشه های تند

۸ـ در روی یکی از پهلوهای گوشهٔ تند A نقطه‌ای C برگزیده از آنجا CB را بر AC ستون (عمود) میکنیم تا پهلوی دیگر گوشه را در B تلاقی کند.
بدین ترتیب سه‌بر راست گوشهٔ ACB بدست میآید (شکل ۳)

B
C
A
(شکل ۳)

بطوریکه در مقدمهٔ کتاب دیدیم نسبت های $\frac{BC}{AC}$ و $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{BC}{AB}$ بستگی به پهلوهای این سه گوشه و یا بستگی بجای نقطهٔ C روی پهلوی AC ندارند

این نسبتها که تنها به گوشه A بستگی دارند هر یک دارای نامی میباشند:

عدد $\frac{BC}{AB}$ را سینوس(۱) گوشهٔ A مینامیم و آنرا چنین نمایش میدهیم: $\sin A$

عدد $\frac{AC}{AB}$ را سینوس متمم(۲) گوشهٔ A مینامیم و آنرا چنین نمایش میدهیم: $\cos A$

عدد $\frac{BC}{AC}$ را تانژانت(۳) گوشهٔ A مینامیم « « « $tg\ A$

عدد $\frac{AC}{BC}$ را تانژانت متمم(۴) گوشهٔ A مینامیم « « « $\cot A$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

---

(۱) sinus (۲) Cosinus (۳) tangente (۴) Cotangente

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$tg A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC}$$

چنانکه دیده میشود :

الف - تانژانت یک گوشهٔ تند برابر بخش سینوس آن گوشه است به سینوس متمم آن :

$$tg A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad (۵)$$

و همچنین تانژانت متمم یک گوشه بهر سینوس متمم آنست بر سینوس آن :

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \qquad (۶)$$

و می بینیم تانژانت متمم یک گوشهٔ تند وارونهٔ تانژانت آن گوشه است

$$tg A \times \cot A = 1 \qquad (۷)$$

ب - چون سینوس و سینوس متمم هر کدام برابر بخش یکی از پهلوهای گوشهٔ راست است بر وتر پس هیچگاه اندازهٔ آنها از یک بزرگتر نخواهد بود .

تعریفهای بالا را چنین نیز میتوان بیان کرد :

در هر سه بر راست گوشه

سینوس یکی از گوشه های تند برابر نسبت درازای پهلوی روبروی آن گوشه است به درازای وتر :

$$\sin A = \frac{(BC)\ A}{(AB)}$$ درازای پهلوی روبروی گوشه / درازای وتر

سینوس متمم یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت درازای پهلوی مجاور آن گوشه به درازای وتر :

$$\cos A = \frac{(AC)\ A}{(AB)}$$ درازای پهلوی مجاور گوشه / درازای وتر

تانژانت یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت پهلوی روبروی آن گوشه به پهلوی مجاور آن :

$$\operatorname{tg} A = \frac{(BC)A}{(AC)\ A}$$ درازای پهلوی روبروی / درازای پهلوی مجاور

تانژانت متمم یکی از گوشه های تند برابر است با نسبت پهلوی مجاور گوشه به پهلوی روبروی آن :

$$\cot A = \frac{(AC)A}{(BC)\ A}$$ درازای پهلوی مجاور / درازای پهلوی روبروی

$\sin A$ و $\cos A$ و $\operatorname{tg} A$ و $\cot A$ را پردازش های (تابع های) مثلثاتی گوشه A مینامیم .

از همین راه میتوان پردازش های مثلثاتی گوشه B را (شکل ۳) بدست آورد .

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

$$tg\, B = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC}$$

از سنجیدن پروازشهای مثلثاتی $\hat{A}$ با پروازشهای مثلثاتی $\hat{B}$ می بینیم که:

$$\sin A = \cos B$$

$$\cos A = \sin B$$

$$tg\, A = \cot B$$

$$\cot A = tg\, B$$

یعنی اگر A را بازینه اندازه گرفته باشیم خواهیم داشت:

$$(\lambda) \quad \begin{cases} \sin A = \cos (90^\circ - A) \\ \cos A = \sin (90^\circ - A) \\ tg\, A = \cot (90^\circ - A) \\ \cot A = tg\, (90^\circ - A) \end{cases}$$

نام پروازشهای مثلثاتی متممهای برابرهایشان نامیده، کسینوس متمم A

یعنی سینوس $90^\circ - A$ و ....)

خلاصه اینکه هرگاه دو گوشه متمم همدیگر باشند سینوس یکی از آنها برابر سینوس متمم دیگر است و تانژانت یکی از آنها برابر تانژانت متمم گوشه دیگر میباشد

مثلاً $\sin 60° = \cos 30°$ و $\sin 45° = \cos 45°$ و $\operatorname{tg} 37° = \cot 53°$ و .....

ورزش

تانژانت و سینوس برخی از گوشه ها در جدول زیر نوشته شده :

گوشه	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°	۶۰°
تانژانت	٫۱۷۶	٫۳۶۴	٫۵۷۷	٫۸۳۹	۱٫۱۹	۱٫۷۳
سینوس	٫۱۷۴	٫۳۴۲	٫۵۰۰	٫۶۴۳	٫۷۶۶	٫۸۶۶

۱- بکمک این جدول پیدا کنید درازای پهلوی دیگر سه برهای راست گوشه ABC را (C گوشه راست) که دو جزء آن عبارتند از

الف) $B = 60°$ ، $a = 14$ متر   ب) $B = 40°$ ، $c = 30$ سانتیمتر

ج) $A = 30°$ ، $c = 14$ متر   د) $B = 50°$ ، $a = ٫32$

ل) $A = 20°$ ، $a = 36$ ملیمتر   م) $B = 10°$ ، $a = ٫51$

۲- از روی همین جدول مثلث های (ب) (ل) (الف) (ج) (د) را حساب کنید.

۳- برابر پردازش های زیر را بحسب پردازش متمم بنویسید مثلاً بنویسید

$\sin 27^\circ = \cos 63$

$\sin 53^\circ = ?$ $\sin 27^\circ = ?$

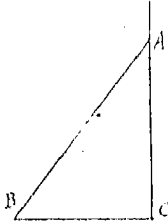
$\cot 22^\circ 35' = ?$ $tg\, 23^\circ 22' = ?$

$tg\,(90^\circ - 15) = ?$ $\cos 34^\circ 47' = ?$

$\cos[90 - (a + b)] = ?$ $\sin(90^\circ - 75^\circ) = ?$

$tg\,(90^\circ - a + b) = ?$

۹- تغییرات پردازش های مثلثاتی یک گوشه تند - تغییرات سینوس

در سه بر راست گوشه ABC (که در آن $\hat{C}$ گوشه راست است) (ش ۴) اگر نقطه های B و C پا بر جا باشند و جای A روی هـ C تغییر کند می بینیم اگر نقطه A خیلی نزدیک به C باشد گوشه A خیلی نزدیک به 0° میباشد و هر چه نقطه A از نقطه C دورتر شود گوشه A از 90° کوچکتر شده و کم کم به صفر نزدیک میشود.

شکل ۴

از روی شکل می بینیم که اگر $\hat{A}$ بزرگ شود $\sin A$ نیز بزرگ میشود زیرا $\sin A$ برابر $\frac{CB}{AB}$ است که در آن CB پا بر جا و AB در سوی ارون $\hat{A}$ تغییر میکند - وقتیکه $\hat{A}$ نزدیک به 90° باشد سینوس آن نزدیک به یک است و موقعی که

$\hat{A}$ نزدیک بصفر باشد سینوس آن نیز نزدیک بصفر است:

$\hat{A}$	٠ → ٩٠°
$\sin A$	٠ → ١

تغییرات سینوس متمم - در همان شکل پیش که باز BC را پایا میگیریم موقعی که جای A تغییر میکند گوشه B نیز تغییر میکند - وقتی A در C است گوشه B برابر صفر است و وقتی که A از C دور میشود گوشه B بزرگ میشود و در وقتیکه A بی اندازه از C دور شود $\hat{B}$ به ٩٠° میرسد.

از روی تساوی $\cos B = \frac{BC}{AB}$ دیده میشود که سینوس متمم یک است وقتی که گوشه صفر باشد و چون گوشه از صفر ترقی کند تا به ٩٠° برسد سینوس متمم از ١ تنزل میکند تا بصفر برسد:

$\hat{B}$	٠° → ٩٠°
$\cos B$	١ → ٠

تغییرات تانژانت - در همان شکل پیش داریم $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$ می بینیم وقتی که گوشه از صفر ترقی کند تا به ٩٠° برسد تانژانت آن از صفر ترقی

$\hat{B}$	٠ → ٩٠°
$\operatorname{tg} B$	٠ → ∞

کرده بی اندازه بزرگ میگردد.

تغییرات کتانژانت متمم - چون کتانژانت متمم وارون تانژانت است تغییراتش وارونهٔ تغییرات تانژانت میباشد (و یا اینکه مینویسیم $\cot B = tg(90^\circ - B)$)

$\hat{B}$	$0^\circ \nearrow 90^\circ$
$\cot B$	$\infty \searrow 0$

تبصره - میتوانستیم همینطور تغییرات $\cos B$ را از روی تغییرات $\sin(90^\circ - B)$ بدست آوریم.

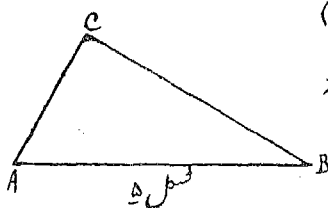
ورزش

کدام یک از نابرابریهای زیر درست است و کدام نادرست؟

$\sin 50^\circ > \sin 30^\circ$ $\qquad$ $\sin 48^\circ > \cos 48^\circ$

$tg 50^\circ < tg 30^\circ$ $\qquad$ $\cos 50^\circ > \cos 30^\circ$

$\sin 35^\circ > \cos 35^\circ$ $\qquad$ $\cot 50^\circ < \cot 30^\circ$

۱۰ - پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ 30° و 60° - فرض کنیم در سه بر راست گوشهٔ ACB (که در آن گوشهٔ C راست است) گوشهٔ B برابر 30° باشد (شکل ۵) بنابرین گوشهٔ A برابر 60° خواهد بود.

C

A B

شکل ۵

نخست پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ ۳۰ را حساب می کنیم برای معین کردن پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ B باید نسبت های $\frac{AC}{AB}$ و $\frac{BC}{AB}$ و $\frac{AC}{BC}$ را حساب کنیم. برای این کار دو قضیهٔ هندسی زیر را یادآوری میکنیم:

نخست هرگاه در یک سه بر راست گوشه یکی از گوشه های تند برابر ۳۰ باشد دارای پهلوی روبروی آن گوشه نیم وتر خواهد بود (چرا؟)

دوم - در هر سه بر راست گوشه توان دوم وتر برابر است با مجموع توانهای دوم دو پهلوی گوشهٔ راست

بنابر قضیهٔ نخست

$$AC = \frac{1}{۲} AB$$

و از آنجا بنابر قضیهٔ دوم $\overline{BC}^{۲} = \frac{۳}{۴} \overline{AB}^{۲}$ پس

$$BC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AB$$

حال میتوان پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ B را حساب کرد:

$$\sin ۳۰ = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^{\circ} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tg\ ۳۰^{\circ} = \frac{AC}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^{\circ} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{۳}$$

دوم- پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ ۶۰°- چون ۶۰° متمم ۳۰° است

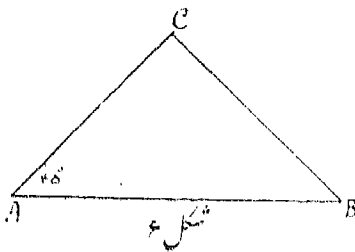
پس خواهیم داشت:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۱- پردازشهای مثلثاتی گوشهٔ ۴۵°- اگر در سه بر راست گوشهٔ ACB (شکل ۶) گوشهٔ A برابر ۴۵° باشد گوشهٔ تند دیگر نیز ۴۵° خواهد بود و بنابرین در سه بر ABC دو پهلوی AC و CB برابر یکدیگرند

شکل ۶

$$AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

پس:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{CB}{AC} = 1$$

خلاصه

$$
(9)\quad
\begin{cases}
\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\operatorname{tg} 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\cot 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}
\end{cases}
$$

$$
(10)\quad
\begin{cases}
\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\operatorname{tg} 45^\circ = \cot 45^\circ = 1
\end{cases}
$$

پس با درنظر گرفتن تغییرات پردازشهای مثلثاتی (شماره ۹) جدول زیر را خواهیم داشت :

A	0°	↗	30°	↗	45°	↗	60°	↗	90°
$\sin A$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1
$\cos A$	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0
$\operatorname{tg} A$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$	↗	∞
$\cot A$	∞	↘	$\sqrt{3}$	↘	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

۱۲ـ تبصره ـ چنانکه خواهیم دید (ورزشهای ۲۳ ، ۵۲ و ۵۴ آخر کتاب) از روی پردازشهای مثلثاتی گوشه‌های ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° میتوان پردازشهای مثلثاتی برخی از گوشه‌ها مانند ۱۵° و ۷۵° و دیگر را معین نمود ولی از اینها گذشته نمیتوان پردازشهای مثلثاتی هر گوشه را بطور درست معین کرد ـ مقدار

تقریبی پردازش های مثلثاتی گوشه های از ۰ تا ۹۰ را حساب کرده و در جدولهائی ضبط کرده اند - در آخر کتاب یکی ازین جدولها دیده میشود که در آن پردازش های مثلثاتی گوشه ها (ده دقیقه بده دقیقه) با یک ده هزارم تقریب نوشته شده است .

۱۳- بستگی میان سینوس و سینوس متمم یک گوشه - در سه بر راست گوشهٔ ACB (C گوشه راست) داریم :

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$$

و یا

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{CA}{AB}\right)^2 = 1$$

یعنی

$$(\cos B)^2 + (\sin B)^2 = 1$$

یعنی مجموع توانهای دوم سینوس یک گوشه و سینوس متمم آن گوشه برابر یک است . معمولاً توان دوم $\sin B$ و $\cos B$ را برتیب چنین نویسند : $\cos^2 B$ و $\sin^2 B$

پس

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1 \qquad (1)$$

ازینجا دیده هم دیده میشود که سینوس و سینوس متمم یک گوشه نشده هیچگاه نمیشود از یک بزرگتر باشد (۸ ب)

ورزش

۱- از روی بستگیهای (۵) (۶) (۷) و (۱۱)

الف - عبارتهای زیر را تنها بحسب $\sin a$ بنویسید :

$$\sin a \cos^2 a - \frac{tg\, a}{\cos a} = \sin a(1-\sin^2 a) - \frac{1}{\cos a} \times \frac{\sin a}{\cos a} =$$

$$\sin a \left(1 - \sin^2 a - \frac{1}{1-\sin^2 a}\right) = \sin^3 a \times \frac{\sin^2 a - 2}{1-\sin^2 a}$$

$$\cos a \cdot tg\, a - \frac{\sin a}{\cos^2 a}$$

$$tg^2 a + 1 - \frac{1}{\sin^2 a} + 2 \sin a \cos^2 a$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} - tg^2 a + \cos^2 a - \cot^2 a$$

ب - عبارتهای زیر را بحسب $tg\, x$ بنویسید :

$$\cot x + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \quad ; \quad \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(1+\cos x)(1-\cos x) + tg\, x\,(\cot x - 1)$$

$$\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cot x + \cos x \cdot tg\, x$$

$$(1 - \sin x \cdot \cos x) : (1 + \sin x \cdot \cos x) - \cot x \sin x$$

ج - عبارتهای زیر را بحسب $\cos b$ تنها بنویسید :

$$1 + tg^2 b \qquad \frac{\sin^2 b}{\cos b} + \frac{tg\, b}{\cot b}$$

$$tg^2 b + \cot^2 b - \sin^2 b - \cos^2 b$$

$$\frac{tg\, x}{\sin x} + \frac{\cot x}{tg\, x} = (\cot^2 x = 1) \sin^2 x$$

$\sin b \quad \cos b \quad tg\, b \quad \cot b$

۲- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$۴ \cos^{۳} ۳۰^\circ - ۳ \cos ۳۰^\circ$

$tg\, ۴۵^\circ \times \cot ۳۰^\circ : (\sin ۴۵^\circ : \cos ۳۰^\circ)$

۳- نابرابریهای زیر را روشن سازید (a گوشه ایست تند)

$\sin a + \cos a \geqslant ۱$

$\sin a + \cos a \leqslant \sqrt{۲}$

$tg\, a + \cot a \geqslant ۲$

$\sin a \cos a \leqslant \frac{۱}{۲}$

۴- بکمک جدول پیدارشهای مثلثاتی درستی برابریهای زیر را بررسی کنید.

$\frac{\sin ۵۰^\circ - \sin ۱۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ - \cos ۱۰^\circ} = -\sqrt{۳}$

$\cos ۸۰^\circ + \cos ۴۰^\circ = \cos ۲۰^\circ$

۵- آیا برابریهای زیر درست است؟

$\sin ۶۰^\circ + \sin ۳۰^\circ = \sin (۶۰^\circ + ۳۰^\circ)$

$tg\, ۶۰^\circ + tg\, ۳۰^\circ = tg\, (۶۰^\circ + ۳۰^\circ)$

$۲ \cos ۴۵^\circ = \cos ۹۰^\circ$

$$\cot 30^\circ + \cot 45^\circ = \cot 75^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 2\sin 30^\circ$$

۶- از روی بستگیهای (۵) و (۶) و (۷) و (۱۱) درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید:

$$tg\,x \cdot \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin z}{1+\cos z} = \frac{1-\cos z}{\sin z}$$

$$\frac{1+\sin a}{1-\sin a} - \frac{1-\sin a}{1+\sin a} = \frac{4\,tg\,a}{\cos a}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

۱۴- مسئله - با داشتن یکی از پردازشهای مثلثاتی یک گوشه تند پردازشهای دیگر آن گوشه را بدست آورید.

مثلاً سینوس گوشه تندی که آن را $\hat{B}$ مینامیم $\frac{2}{5}$ است میخواهیم $\cos B$ و $tg\,B$ و $\cot B$ را حساب کنیم

الف - گشایش جبری - برای گشودن مسئله از راه جبر بستگی های (۵) و (۶) و (۷) و (۱۱) را که میان پردازشهای مثلثاتی یک گوشه موجود است

بکار میبریم.

از روی بستگی (۱۱) $\cos^2 B$ بدست میآید

$$\cos^2 B = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

پس

$$\cos B = \pm \frac{4}{5}$$

ولی بموجب تعریف پردازشهای مثلثاتی یک گوشهٔ تند همه مثبتند زیرا هریک از آنها برابر نسبت دو درازای هندسی می باشد - بنابرین

$$\cos B = \frac{4}{5}$$

حال بنابر بستگی (۵)

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3}{4}$$

و بنابر بستگی (۷)

$$\cot B = \frac{4}{3}$$

اگر بجای سینوس یکی دیگر از پردازشهای مثلثاتی داده بشود گشایش مسئله مانند بالا میبود.

ب - گشایش هندسی - روی یکی از پهلوهای گوشهٔ راست c نقطهٔ A را بفاصلهٔ $\frac{3}{5} = CA$ یکهٔ درازا گرفته بمرکز A کمان دایره‌ای می کشیم که درازای پرتو آن برابر یکهٔ درازا باشد تا پهلوی دیگر گوشهٔ c را

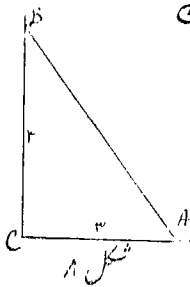
در B تلاقی کند (شکل ۷) - سینوس گوشه ABC عدد داده شده $\frac{۳}{۵}$ است و پردازشهای مثلثاتی این گوشه پاسخ مسئله میباشند - برای بدست آوردن آنها کافیست درازای BC را اندازه بگیریم - در این شکل BC برابر $\frac{۴}{۵}$ یکه درازاست

شکل ۷

پس

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{۵}$$

$$tg\ B = \frac{AC}{BC} = \frac{۳}{۴}$$

$$\cot B = \frac{۴}{۳}$$

اگر بجای سینوس B سینوس متمم B داده میشد راه گشایش مانند بالا میبود - اگر tgB داده شود مثلاً $\frac{۳}{۴} = tg\ B$ کافیست روی پهلوهای گوشه راستی مانند $\hat{C}$ درازاهائی بترتیب برابر با ۳ و ۴ یکه درازا ببریم تا سه بر ACB پیدا شود (شکل ۸

شکل ۸

$CA = ۳$ $\qquad CB = ۴$

و از روی شکل درازای AB را اندازه میگیریم میشود $AB = ۵$

پس

$$\sin B = \frac{CA}{AB} = \frac{۳}{۵}$$

$$\cos B = \frac{CB}{AB} = \frac{۴}{۵}$$

$$\cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{۴}{۳}$$

ورزش

۱- پردازشهای مثلثاتی دیگر گوشه x را بدست آورید :

(۱) $\sin x = \frac{۱}{۲}$ (۲) $\cot x = ۳$

(۳) $tg\, x = \frac{۹}{۴}$ (۴) $\cos x = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

(۵) $tg\, x = \frac{۲۴}{۷}$ (۶) $\cot x = \frac{۴۱}{۴۰}$

(۷) $\cos x = \frac{۱}{۵}$ (۸) $tg\, x = \frac{۴\sqrt{۲}}{۷}$

(۹) $\cos x = \frac{۱۲}{۱۳}$ (۱۰) $\sin x = \frac{۳}{۴}$

(۱۱) $tg\, x = a$ (۱۲) $\sin x = \frac{a}{b}$

۱۳- اگر $\sin x = ۳$ و $tg\, y = ۴$ باشد آیا میتوان پردازشهای دیگر x و y را حساب کرد؟ چرا؟

۱۴- آیا گوشه‌ای یافت میشود که سینوس آن ۰٫۶ و سینوس متمم آن ۰٫۷ باشد؟

۱۵- $\sin x = \frac{۴}{۵}$ بدست آورید پردازشهای مثلثاتی $x - ۹۰^\circ$ را

۱۵- پیدا کردن یک گوشه تند با داشتن یکی از پردازشهای مثلثاتی آن

الف - راه هندسی - دیدیم (۱۴ ب) که اگر مثلاً $\sin B$

داده شده باشد میتوان سه‌گوشه‌ای ABC کشید که در آن سینوس گوشهٔ B عدد داده شده است پس کافی است گوشهٔ B را با نقاله اندازه بگیریم. در شکل ۷ که سینوس B برابر $\frac{۳}{۵}$ است می‌بینیم $\widehat{B}$ تقریباً ۳۷° است.
اگر بجای سینوس کسینوس متمم و یا تانژانت داده شود راه گشایش مسئله همین است.

ورزش

گوشهٔ x را در هر یک از حالتهای زیر کشیده پردازش های دیگر آن را بیابید.

(۱) $\sin x = \frac{۵}{۹}$ (۲) $\sin x = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

(۳) $\sin x = \frac{۱}{۲}$ (۴) $\cos x = \frac{۳}{۵}$

(۵) $\cos x = \frac{۲m}{۱+m^۲}$ (۶) $tg\, x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۷) $\cot x = \frac{۸}{۱۵}$ (۸) $tg\, x = \frac{\sqrt{۱-m^۲}}{m}$

(۹) $\cot x = \frac{۳a}{۴}$

ب - از روی جدول - مثال ۱ - سینوس گوشهٔ تندی ۰٫۶۰۴۱ است کدام است آن گوشه؟
در جدول می‌بینیم که عدد ۰٫۶۰۴۱ سینوس ۱۰′ ۳۷° است:

$$\sin ۳۷° \; ۱۰' = ۰٫۶۰۴۱$$

مثال ۲- تانژانت گوشه تندی ۰٫۳۵۲۸ است آن گوشه را معین کنید

این عدد در جدول در ستون تانژانت دیده نمی شود ولی می بینیم این عدد از ۰٫۳۵۰۸ که تانژانت ′۲۰ ۱۹ است بزرگتر و از ۰٫۳۵۴۱ که تانژانت ′۳۰ ۱۹ میباشد کوچکتر است - پس چون هرگاه گوشه تند بزرگ شود تانژانت آن نیز بزرگ میشود گوشه ناشناس از ′۲۰ ۱۹ بزرگتر و از ′۳۰ °۱۹ کوچکتر است.

برای حساب کردن آن میتوان تقریباً فرض نمود که از ′۲۰ °۱۹ تا ′۳۰ °۱۹ تغییرات گوشه متناسب است با تغییرات تانژانت آن. در اینصورت چون تفاضل میان ′۲۰ °۱۹ tg و عدد داده شده ۰٫۰۰۲۰ میباشد و تفاضل میان ′۲۰ °۱۹ tg و ′۳۰ °۱۹ tg ۰٫۰۰۳۳ است گوئیم.

هرگاه بگوشه ′۱۰ افزوده شود به تانژانت ۰٫۰۰۳۳ افزوده میشود پس چه اندازه بگوشه باید افزوده شود تا به تانژانت ۰٫۰۰۲۰ افزوده شود؟

جواب $\frac{۱۰ \times ۲۰}{۳۳}$ دقیقه است یعنی تقریباً ۶ دقیقه- بنابرین گوشه ناشناس برابر ′۲۶ °۱۹ است:

$$tg\ 19^\circ\ 26' = 0{,}3528$$

شرح بالا را بطور خلاصه چنین نویسند:

$$D = ۳۳ \left\{ \begin{array}{ll} ۲۰ \left[\begin{array}{l} ۰/۳۵۰۸ \\ ۰/۳۵۲۱ \end{array} \right. & \begin{array}{l} ۱۹° \ ۲۰' \\ x \end{array} \\ ۰/۳۵۳۱ & ۱۹° \ ۳۰' \end{array} \right\} ۱۰$$

$$x = ۱۹° \ ۲۰' + \left(\frac{۱۰ \times ۲۰}{۳۳} \right)'$$

مثال ۳- سینوس متمم یک گوشه تند ۰/۹۰۱۷ است کدام است آن گوشه؟

این عدد نیز در جدول در ستون سینوس متمم ها دیده نمی شود ولی می بینیم از عدد ۰/۹۰۱۳ که $\cos ۲۵° \ ۴۰'$ است بزرگتر و از عدد ۰/۹۰۲۶ که $\cos ۲۵° \ ۳۰'$ است کوچکتر است

ولی میدانیم هرگاه گوشه تند بزرگ شود سینوس متمم آن کوچک میشود و بعکس پس گوشه ناشناس از ۲۵° ۴۰' کوچکتر و از ۲۵° ۳۰' بزرگتر است.

با فرض میکنیم از ۲۵° ۳۰' تا ۲۵° ۴۰' تغییرات سینوس متمم با تغییرات گوشه تناسب باشد بنابرین چون تفاضل میان $\cos ۲۵° \ ۴۰'$ و $\cos ۲۵° \ ۳۰'$ ۰/۰۰۱۳ و تفاضل میان ۲۵° ۳۰' $\cos$ و عدد داده شده ۰/۰۰۰۹ است گوئیم:

هرگاه ۱۰' بگوشه افزوده شود از سینوس متمم آن ۰/۰۰۱۳ کم میشود پس چه اندازه

به گوشه افزوده شود تا از سینوس متمم آن ۰٫۰۰۰۹ کم شود ؟
جواب $\frac{10 \times 5}{13}$ یا تقریباً ۷ دقیقه است بنابرین گوشه ناشناس
۲۵° ۳۰′ + ۷′ است :

cos ۲۵° ۳۷′ = ٫۹۰۱۷

در این جا نیز خلاصه عمل را چنین می‌نویسیم :

$$D - 13 \left\{ 9 \begin{cases} 9026 & 25 \;\; 30' \\ 9017 & x \\ 9013 & 25° \;\; 40' \end{cases} \right\} 10$$

$$x = 25° \;\; 30' + \left(\frac{10 \times 9}{13}\right)'$$

ورزش

۱- گوشه های x از ورزش بالا (۱۵ الف) را از روی جدول پیدا کنید یا از راه
دیگر x را از روی جدول بدست آورده دو نتیجه را با هم بسنجید.

۲- از روی جدول درستی عددهای زیر را بررسی نمائید

sin ۴۱° ۴۰′ = ٫۶۶۴۸ ; cos ۳۸° ۵′ = ٫۷۸۷۱

sin ٫۶۲۲۸ = ٫۶۲۷۱ , tg ۵۳° ۴۵′ = ۱٫۳۶۳۹

cos ۴۹° ۱۷′ = ٫۶۴۲۵ ; cot ۶۴° ۱۰′ = ٫۴۸۴۱

۳- گشایش سه‌برهای راست‌گوشه

۱۶- چنانکه در مقدمه گفته شد موضوع علم مثلثات پیدا کردن جزرهای ناشناس سه‌گوشه‌ها است از روی جزرهای شناخته آنها بوسیلهٔ دستورهای مثلثاتی.

اینک با آنچه آموختیم میتوانیم به گشایش سه‌برهای راست‌گوشه بپردازیم:

از راه هندسی میدانیم که هرگاه یک پهلو و یک جزر دیگر (جز گوشهٔ راست) از یک سه‌بر راست‌گوشه را بشناسیم جزرهای دیگر را میتوان بدست آورد. برای بدست آوردن جزرهای ناشناس دستورهائیکه بکار میبریم اینهاست:

(C گوشهٔ راست)

(قضیهٔ فیثاغورس) $$c^2 = a^2 + b^2 \quad (۱۲)$$

$$A + B = 90° \quad (۱۳)$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \quad (۱۴)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B \quad (۱۵)$$

$$tg\, A = \frac{a}{b} = \cot B \quad (۱۶)$$

دستورهای (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) در شمارهٔ ۸ ضمن تعریف پردازشهای

مثلثاتی گوشه تند بدست آمده و معنای آنها را دوباره بعبارت دیگر یادآوری میکنیم:

در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوهای گوشه راست برابر است با حاصل ضرب درازای وتر در سینوس متمم گوشه مجاور بدان پهلو:

$b = c \cos A$ $\qquad$ $a = c \cos B$

در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوهای گوشه راست برابر است با حاصل ضرب درازای وتر در سینوس گوشه روبروی آن پهلو:

$b = c \sin B$ $\qquad$ $a = c \sin A$

در هر سه بر راست گوشه درازای هر یک از پهلوهای گوشه راست برابر است با حاصل ضرب تانژانت گوشه روبروی آن پهلو در درازای پهلوی دیگر

$b = a \cdot tg\, B$ $\qquad$ $a = b \cdot tg\, A$

پرسش های ساده

اگر در سه بر راست گوشه ABC ($\hat{C}$ گوشه راست)

(۱) $\sin A = \frac{1}{4}$ و $۳٦ = c$ متر باشد a چند است؟

(۲) $\sin A = \frac{۲}{۵}$ و $c = ۲۴$ متر باشد a چقدر است

(۳) $\operatorname{tg} A = \frac{۳}{۴}$ و $b = ۱۶$ 〃 〃 a 〃

(۴) $\operatorname{tg} A = \frac{۴}{۳}$ و $b = ۱۵$ 〃 〃 c 〃

(۵) 〃 〃 و $c = ۱۵$ 〃 〃 a 〃

(۶) $\sin A = \frac{۳}{۸}$ و $a = ۱۸$ 〃 〃 c 〃

(۷) $\cos A = \frac{۲}{۳}$ و $c = ۲۱$ 〃 〃 a و b 〃

(۸) $\operatorname{tg} A = ۰/۲۵$ و $b = ۲۰$ 〃 〃 پهنه 〃

(۹) $\frac{۱}{\sin A} = ۵$ و $b = ۵۰$ 〃 〃 c و a 〃

مثال نخست - از سه بر راست گوشهٔ ABC وتر AB و گوشهٔ $\hat{B}$ را

داریم: $AB = c = ۱۵/۷۰$ متر

$$\hat{B} = ۳۵^\circ\ ۴۰'$$

ناشناسها عبارتند از $\hat{A}$ و پهلوهای $a = BC$ و $b = AC$

گشایش - بموجب دستور (۱۳)

$$A = ۹۰^\circ - ۳۵^\circ\ ۴۰' = ۵۴^\circ\ ۲۰'$$ وبموجب دستورهای (۱۴) و (۱۵)

$$a = c \cos B = ۱۵/۷ \times \cos ۳۵^\circ\ ۴۰'$$

$$b = c \sin B = ۱۵/۷ \times \sin ۳۵^\circ\ ۴۰'$$

$\sin B$ و $\cos B$ ازروی جدول بدست میآید :

$\sin 35^\circ\ 40' = ۰٫۵۸۳۱$

$\cos 35^\circ\ 40' = ۰٫۸۱۲۴$

پس

$a = ۱۵٫۷ \times ۰٫۸۱۲۴ = ۱۲٫۷۵۵$ متر

$b = ۱۵٫۷ \times ۰٫۵۸۳۱ = ۹٫۱۵۴$ متر

اگر پهنهٔ سه بر راسم بخواهیم با داشتن a و b میتوان آنرا حساب کرد

$S = \frac{a \cdot b}{۲} = \frac{c^۲}{۲} \sin B . \cos B = \frac{۱۲٫۷۵۵ \times ۹٫۱۵۴}{۲} = ۵۸٫۳۸$ متر مربع

میتوان درستی نتیجه را از روی دستور (۱۲) بررسی نمود

مثال دوم - از سه بر راست گوشهٔ ABC پهلوی AC و یکی از گوشه های تند را داریم :

$AC = b = ۲۳٫۶۵$ متر

$\hat{A} = ۲۸^\circ\ ۲۰'$

درینجا وتر AB و پهلوی BC و گوشهٔ $\hat{B}$ ناشناس است

گشایش - بموجب دستور (۱۳)

$B = ۹۰^\circ - ۲۸^\circ\ ۲۰' = ۶۱^\circ\ ۴۰'$

و بموجب دستورهای (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت :

$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{۲۳{,}۶۵}{\cos ۲۸° ۳۰'}$$

$$a = b \operatorname{tg} A = ۲۳{,}۶۵ \times \operatorname{tg} ۲۸° ۳۰'$$

$\cos A$ و $\operatorname{tg} A$ را از روی جدول بدست میاوریم:

$$\cos ۲۸° ۳۰' = ۰٫۸۸۰۲$$

$$\operatorname{tg} ۲۸° ۳۰' = ۰٫۵۳۹۲$$

پس

$$c = \frac{۲۳{,}۶۵^{\text{متر}}}{۰٫۸۸۰۲} = ۲۶{,}۸۷^{\text{متر}}$$

$$a = ۲۳{,}۶۵^{\text{متر}} \times ۰٫۵۳۹۲ = ۱۲{,}۷۵^{\text{متر}}$$

پهنه سه بر هم برابر است با

$$\frac{ab}{۲} = \frac{۱}{۲} b^2 \operatorname{tg} A = \frac{۲۶{,}۸۷ \times ۱۲{,}۷۵}{۲} = ۱۷۱{,}۲۹۶^{\text{متر مربع}}$$

در این جا هم میتوان درستی نتیجه را از روی دستور (۱۲) بررسی نمود و آنرا چنین مینویسیم:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

مثال سوم - از یک سه بر راست گوشه دو پهلوی گوشه راست را می شناسیم:

$$AC = b = ۸^{\text{متر}}$$

$$BC = a = ۷^{\text{متر}}$$

وتر و گوشه ها ناشناس است .

گشایش - گرچه وتر از روی دستور (۱۴) بدست میآید ولی برای اینکه ریشه گرفتن در کار نباشد بهتر اینست که وتر را پس از گوشه ها و از روی آنها بدست بیاوریم و دستور (۱۴) را برای بررسی درست بودن نتیجه بکار ببریم :

بموجب دستور (۱۶)

$$tg A = \frac{a}{b} = \frac{۷}{۸} = ۰/۸۷۵$$

چون تانژانت $\widehat{A}$ را داریم $\widehat{A}$ را از روی جدول بدست میاوریم :

$$A = ۴۱^\circ \quad ۱۱'$$

پس
$$B = ۹۰^\circ - A = ۴۸^\circ \quad ۴۹'$$

حال وتر را مثلا از روی دستور (۱۵) حساب می کنیم :

$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{۸}{\cos ۴۱^\circ ۱۱'}$$

و $\cos ۴۱^\circ \; ۱۱'$ را از روی جدول حساب میکنیم :

$$\cos ۴۱^\circ \; ۱۱' = ۰/۷۵۲۶$$

پس
$$c = \frac{۸}{۰/۷۵۲۶} = ۱۰/۶۳ \text{ متر}$$

مثال چهارم - از یک سه بر راست گوشه وتر و یکی از پهلو های گوشه

راست را داریم:

$$AB = c = ۱۱^{\text{متر}}$$

$$AC = b = ۷^{\text{متر}}$$

ناشناس ها در این جا عبارتند از دو گوشهٔ A و B و پهلوی a

گشایش - بموجب دستور (۱۵)

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{۷}{۱۱} = ۰٫۶۳۶۳$$

پس $\hat{A}$ از روی جدول بدست میآید:

$$A = ۵۰^{\circ}\ ۲۹'$$

و بموجب دستور (۱۳)

$$B = ۹۰^{\circ} - A = ۳۹^{\circ}\ ۳۱'$$

و بموجب دستور (۱۶)

$$a = b \cdot tg A$$

و $tg A$ از روی جدول بدست میآید:

$$tg\ ۵۰^{\circ}\ ۲۹' = ۱٫۲۱۲۴$$

پس

$$a = ۷ \times ۱٫۲۱۲۴ = ۸٫۴۸۶^{\text{متر}}$$

در این جا نیز میتوان a را از روی دستور $a^2=(c-b)(c+b)$ بدست آورد و به درستی نتیجه پی برد.

ورزش

جزءهای ناشناس و بهینه سه برهای راست گوشهٔ زیر را بشناسانید:

(۱) $A =$ ۲۵ ۲۷ ، $a =$ ٫۰۱۵۱

(۲) $b =$ ۱٫۵۸ ، $a =$ ٫۹۷۶

(۳) $a =$ ۱۷٫۵۱۲ ، $c =$ ۲۱٫۳۸۵

(۴) $A =$ ۵۹° ۴۷' ، $c =$ ۱۷۴۹

(۵) $B =$ ۲۸ ۳۴' ، $b =$ ۲۹۳۲۵

(۶) $a =$ ۷٫۲۳۴ ، $b =$ ۸٫۹۱۷

(۷) $b =$ ۳۷۱۱ ، $c =$ ۲۹۷۶

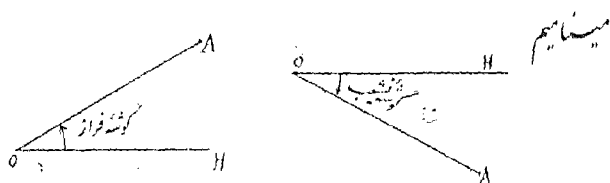
(۸) $B =$ ۷۴° ۱۳' ، $c =$ ٫۰۰۱۰۷۸

(۹) $B =$ ۲۹ ۱۲' ، [illegible] $=$ ٫۰۵۹۵

(۱۰) $A =$ ۵۳° ۱۷' ، $c =$ ۸۱۷٫۶

(۱۱) $A =$ ۴۹° ۲۶' ، $a =$ ۱۵۱۰

(۱۲) $B =$ ۶۱° ۱۸' ، $a =$ ٫۱۰۸۱

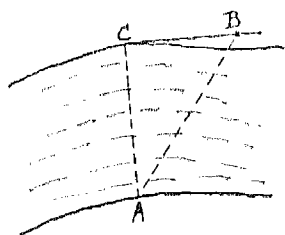
گوشهٔ نشیب و گوشهٔ فراز - فرض کنیم چشم در نقطهٔ O باشد و به نقطه‌ای مانند A نگاه کند - نیم خط OA با امتداد افقی H که از O میگذرد گوشه‌ای میسازد - بنابرآنکه A بالای امتداد H یا پایین آن باشد گوشهٔ تند HOA را گوشهٔ فراز یا گوشهٔ نشیب A از O مینامیم

۱۳- بلندی مناره‌ای ۳۵ متر و گوشهٔ فراز آن از O که روی زمین است (یعنی گوشهٔ فراز سر مناره) ۳۰° میباشد - دوری O از پای منار چند متر است؟

۱۴- به چشم شخصی که ۶۰ متر دور از درختی ایستاده گوشهٔ فراز آن درخت ۳۰° است بلندی درخت را حساب کنید درصورتیکه بلندی چشم آن شخص ۱٫۶ متر بالاتر از زمین باشد.

۱۵- سایهٔ درختی برابر با بلندی آن درخت است بلندی خورشید (یا گوشهٔ فراز خورشید) در آن ساعت چیست؟

۱۶- حوض دایره شکلی است پر از آب در نزدیکی برجی به بلندی ۲۵ متر - برای شناختن درازای میان بر حوض گوشهٔ نشیب دو سر میان بر این حوض اگر با برج در یک راستا هستند از سر برج اندازه گرفته‌ایم ۴۵° و ۳۰° شده درازای میان بر را حساب کنید.

گشایش همین مسئله وقتی که دو گوشه بترتیب °۴۳ و °۲۸ باشد.

۱۷- شخصی برای پیدا کردن پهنای یک رودخانه یعنی برای پیدا کردن اندازهٔ AC در روی عمودیکه از C بر CA کشیده ۲۵ متر از C دور شده ($CB=25$) و گوشهٔ CBA را اندازه گرفته است $\widehat{CBA}=60°$ حساب کنید AC را.

۱۸- با دو گوشه یاب که در دو نقطهٔ A و B میباشند گوشهٔ فراز هواپیمائی را اندازه میگیریم (در وقتیکه هواپیما به هامن شاغولی که از AB میگذرد میرسد) بترتیب °۶۰ و °۴۵ میباشد حساب کنید بلندی هواپیما را بفرض اینکه A و B هردو روی یک خط افقی بوده ۱۵۰۰ متر از هم دور باشند.

۱۹- درکنار رودخانهٔ ای به پهنای ۵۰ متر برجی است - و میدانیم سینوس گوشهٔ فراز برج از آنطرف رودخانه که درست روبروی برج است $\frac{2}{7}$ میباشد - بلندی برج چند متر است؟

۲۰- بچه اندازه از پای برجی که بلندی آن ۲۰ متر است دور باید شد تا گوشهٔ فراز برج °۳۰ °۲۷ دیده شود؟

۲۱- سنگی با پای برجی در یک هامن افقی است اگر گوشهٔ نشیب سنگ از سر برج °۴۰ باشد

گوشهٔ نشیب آن از سوراخی از برج که درست بیک فاصله از پائین و بالای برج است چه خواهد بود؟

۲۲- بلندی سه گوشه متساوی الساقینی ۱۲ متر و هر یک از دو گوشهٔ برابر آن ۴۱° میباشد- پهلوها و پهنهٔ آن را حساب کنید.

۲۳- شخصی میخواهد بلندی درختی را اندازه بگیرد- برای اینکار از دو نقطهٔ A و B که با پای درخت روی یک خط افقی میباشند گوشهٔ فراز درخت را اندازه گرفته- در A سینوس گوشهٔ فراز درخت $\frac{3}{5}$ و در B که ۱۵ متر از A بدرخت نزدیکتر است تانژانت گوشهٔ فراز $\frac{3}{2}$ میباشد بلندی درخت چند متر است؟

۲۴- حساب کنید پرتو دایره های مماطی و محیطی یک پنج بر منتظمی را که پهلویش چهار متر است

۲۵- در یک دایره هرگاه زهی $\frac{2}{3}$ پرتو باشد گوشهٔ مرکزی روبروی آن زه چند درجه است؟

۲۶- برای یافتن بلندی یک برج نگهبانی که در بالای تپه ای ساخته شده است در پائین تپه از دو نقطهٔ A و B گوشهٔ فراز برج را معین کرده ایم بترتیب ۳۲° و ۴۷° شده است- A و B روی یک خط افقی میباشند که با تنهٔ برج در یک نامن است و AB برابر ۳۰ متر میباشد- بلندی برج از پای تپه چند متر است؟

۲۷- بلندی ساختمانی ۲۰ متر است- چه اندازه دور از آن باید بود تا گوشهٔ ۲۵°

دیده شود.

۲۸ - از بالای برجی به بلندی ۱۱۰ متر گوشهٔ نشیب دو نقطهٔ A و B بترتیب ۲۷° ۴۳' و ۲۰° ۳۱' است A و B با پای برج روی یک خط افقی بوده و در یک سمت برج میباشند - فاصلهٔ A و B از همدیگر چقدر است؟

۲۹ - کوهی است به بلندی ۴۵۰۰ متر که گوشهٔ فراز آن از نقطهٔ A که خود ۲۰۰۰ متر بالای دریاست ۲۰° ۳۱' است دوری A از سر کوه بخط راست چقدر است؟

۳۰ - گوشهٔ فراز درختی در یک نقطه ۳۶° است ولی اگر ۵ متر بدرخت نزدیکتر شویم گوشهٔ بلندی آن ۴۲° خواهد بود - بلندی درخت چیست؟

۳۱ - راهی است به شیب ۵ درصد (یعنی دو نقطهٔ از راه که فاصلهٔ افقی آنها صد متر است ۵ متر اختلاف بلندی دارند) معین کنید اختلاف بلندی دو نقطهٔ A و B از راه را بالفرض اینکه A و B پنج کیلومتر از هم دور باشند.

۳۲ - پرتو (شعاع) کرهٔ زمین را هرگاه از ماه بنگرند به گوشهٔ ۵۷' دیده میشود از این رو دوری ماه را از زمین حساب کنید. (به حسب پرتو زمین)

۳۳ - هواپیمائی در بلندی ۵۰۰ متر پرواز میکند - چه دایره‌ای از زمین را خواهد دید؟ (یعنی پرتو این دایره چقدر است؟ و یا پرتو افق هواپیما چیست؟).

۳۴ - هواپیما به چه بلندی باید پرواز کند تا اینکه ۲۰ کیلومتر دورتر را ببیند؟

۳۵- پرتو دایره‌ای ۵۷ سانتیمتر است. پرامون ۵ پهلوی منتظم محاط در آن چه میباشد؟

۳۶- پهنهٔ ۵ پهلوی منتظم محاط در همین دایره چقدر است؟

۳۷- اگر پهنهٔ ۵ پهلوی منتظم محاط در یک دایره ۱۴۱۴ سانتیمتر مربع باشد پهنهٔ ده پهلوی منتظم محاطی چه خواهد بود؟ پرتو این دایره و پرتو دایرهٔ محاط در پنج پهلو را نیز حساب کنید.

۳۸- ثابت کنید که پهنهٔ n پهلوی منتظم محاط در دایره‌ای که پرتوش R است برابر با $nR^2 \sin\frac{180}{n}.\cos\frac{180}{n}$ میباشد و از روی این دستور پهنهٔ چندبرهای منتظم محاطی را که شمارهٔ پهلوهای آن ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۹ و ۱۰ و ۱۲ باشد بحسب R بدست آورید.

۳۹- ثابت کنید که پهنهٔ n پهلوی منتظم محیطی $nR^2 tg\frac{180}{n}$ است.

۴۰- از بالای مناره‌ای به بلندی ۴۲ متر گوشهٔ نشیب دو سنگی که با پای مناره روی یک خط افقی میباشند ۱۴° و ۳۰° میباشد. دو سنگ از هم چه اندازه دورند؟

۴۱- شش پهلوی منتظمی در دایره‌ای محیط است که پرتوش ۹٫۴۶ متر است. درازای پهلوهای آنرا حساب کنید.

۴۲- درازای گوشهٔ بزرگ (قطر) یک ۵ پهلوی منتظم ۷ متر است درازای پهلوهای آن چیست؟

۴۳- نه پهلوی منتظمی در دایره‌ای محاط است به پرتو ۵ متر درازای هر یک از پهلوهای آنرا حساب کنید.

۴۴- میان بر دایره‌ای ۳۱۸۷ است حساب کنید گوشهٔ مرکزی روبرو به کمانی از آن را که زهش ۱۰۶۹ است.

۴۵- زه کمانی به درازای ۲۰ سانتیمتر است؛ دوری میان زه از میان کمان ۶ سانتیمتر اندازهٔ کمان بحساب دقیقه و زینه چیست؟

۴۶- حساب کنید زینه‌های کمانی را که پرتوش ۹ متر و دوری میان آن کمان از میان زهش ۳,۵ متر میباشد.

۴۷- درازای یک پهلوی یک ۸ بر منتظم دو متر است حساب کنید پرتو دایرهٔ محاطی و محیطی آن را.

۴۸- پنج بر منتظمی است محاط در یک دایره به پرتو ۳ متر حساب کنید پرتو دایرهٔ محاطی آنرا.

۴۹- پایه هرمی مربعی به پهلوی ۵ متر است و گوشهٔ میان هر یک از پهلوهای مربع با یال هرم ۷۵ است بلندی هرم چقدر است؟

۵۰- از A که در جنوب برجی است گوشهٔ فراز آن برج ۶۰° است و از B که ۱۰۰ متر در شرق A است گوشهٔ فراز برج ۳۰° بلندی برج را حساب کنید.

۵۱ - از یک نقطه دو درخت A و B را می‌بینیم A که در ۶۱ متری است گوشهٔ فرازش ۳۶° ۴۴' میباشد و گوشهٔ فراز B که در ۲۵ متری میباشد ۳۱° ۵۰' است کدام یک از دو درخت بلندتر است و چه اندازه؟

۵۲ - پرتو دایره‌ای ۸۳۴ سانتیمتر است حساب کنید زه کمان ۵۴' ۲۳'' را

۵۳ - در ساعتی که سایهٔ درختی به بلندی ۳۲٫۲۵ متر ۱۸٫۶۵ متر میباشد خورشید چند درجه بالای افق است؟ (یا بلندی خورشید چه اندازه است؟)

۵۴ - پهنا و درازای راست گوشه‌ای بترتیب ۵۰ و ۷۴ سانتیمتر است حساب کنید گوشه‌ای را که پهلوی بزرگ آن با گوشه بُر (قطر) می‌سازد.

۵۵ - زه دایره‌ای بدرازای ۱۰ متر است و گوشهٔ مرکزی روبروی آن ۱۲° - درازای پرتو دایره را حساب کنید.

۵۶ - سایهٔ درختی در ساعتی که گوشهٔ فراز خورشید ۶۵° است ۱۰ متر میباشد بلندی درخت را حساب کنید.

۵۷ - گوشهٔ خارجی میان دو مماس بر دایره ۶۵° است و درازای این دو مماس (از نقطهٔ تلاقی آنها تا نقطهٔ تماس) پنج متر - پرتو دایره را حساب کنید.

۵۸ - کف ایوان خانه‌ای هشت متر بالاتر از آب حوض آنست و در آن خانه درختی است که گوشهٔ فرازش از نقطهٔ A که در کف ایوان می‌گیریم ۳۰° و گوشهٔ نشیب تصویرش در آب حوض

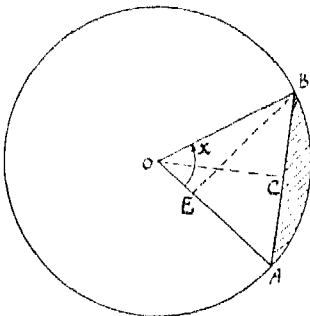
۴۵ میباشد بلندی درخت و فاصله افقی آنرا از A حساب کنید

۵۹ - روی راه راستی سه نقطه A و B و C میگیریم (B میان A و C)

$BC =$ ۲۱۲٫۵ متر $AB =$ ۲۳۶ متر

گوشه فراز B از A (یا شیب BA) ۱۲ ٪ و گوشه فراز C از B (یا شیب CB) ۱۵ ٪ میباشد.

الف - B و C هریک چه اندازه بالاتر از A میباشند؟

ب - اگر شیب از A تا C را یکنواخت کنند این شیب چه اندازه خواهد شد؟

در هندسه می بینیم که پهنه قطاع AOB برابر نیمه حاصل ضرب درازای کمان AB است در درازای پرتو دایره

پس چون $\widehat{AB} = R.x$ (دستور ۳):

$$AOB \text{ قطاع} = \frac{\widehat{AB}}{2} \times OA = \frac{Rx}{2} \times R = \frac{1}{2}R^2x$$

و چون

$$AOB \text{ پهنه سه گوشه} = \frac{1}{2}AB \times OC = \frac{1}{2}OA \times BE = \frac{1}{2}R^2 \sin x$$

پس پهنه پاره دایره (سایه زده) که تفاضل این دو پهنه است چنین خواهد شد:

$$ABC \text{ پهنه} = \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2}R^2 \sin x = \frac{1}{2}R^2(x - \sin x)$$

۵۱ - از یک نقطه دو درخت A و B را می‌بینیم A که در ۱۶ متری است گوشهٔ فرازش ۳۶° ۴۴′ می‌باشد، گوشهٔ فراز B که در ۲۵ متری می‌باشد ۵۰° ۳۱′ است کدام یک از دو درخت بلندتر است و چه اندازه؟

۵۲ - پرتو دایره‌ای ۸۳۴ سانتیمتر است حساب کنید زه کمان ۵۱° ۲۴′ ۲۳″ را

۵۳ - در ساعتی که سایهٔ درختی به بلندی ۲۵٫۳۲ متر ۱۸٫۶۵ متر می‌باشد خورشید چند درجه بالای افق است؟ (یا بلندی خورشید چه اندازه است؟)

۵۴ - پهنا و درازای راست گوشه‌ای بترتیب ۵۰ و ۷۴ سانتیمتر است حساب کنید گوشه‌ای را که پهلوی بزرگ آن با گوشهٔ بُر (قطر) می‌سازد.

۵۵ - زه دایره‌ای بدرازای ۱۰ متر است و گوشهٔ مرکزی روبروی آن ۱۷° - درازای پرتو دایره را حساب کنید.

۵۶ - سایهٔ درختی در ساعتی که گوشهٔ فراز خورشید ۵۶° است ۱۰ متر می‌باشد بلندی درخت را حساب کنید.

۵۷ - گوشهٔ خارجی میان دو مماس بر دایره ۶۵° است و درازای این دو مماس (از نقطهٔ تلاقی آنها تا نقطهٔ تماس) پنج متر - پرتو دایره را حساب کنید.

۵۸ - کف ایوان خانه‌ای ۳ متر بالاتر از آب حوض آنست و در آن خانه درختی است که گوشهٔ فرازش از نقطهٔ A که در کف ایوان می‌گیریم ۳۰° و گوشهٔ نشیب تصویرش در آب حوض

۴۶ میباشد بلندی درخت و فاصله افقی آنرا از A حساب کنید

۵۹ ـ روی راه راستی سه نقطه A و B و C میگیریم (B میان A و C)

$AB =$ ۲۳۶ متر $\qquad BC =$ ۳۱۲٫۵ متر

گوشهٔ فراز B از A (یا شیب BA) ۱۲° ۸' و گوشهٔ فراز C از B (یا شیب CB) ۱۵° ۶' میباشد.

الف ـ B و C هریک چه اندازه بالاتر از A میباشند؟

ب ـ اگر شیب از A تا C را یکنواخت کنند این شیب چه اندازه خواهد شد؟

در هندسه می‌بینیم که پهنهٔ قطاع AOB برابر نیمهٔ حاصل ضرب درازای کمان AB است در درازای پرتو دایره

پس چون $\widehat{AB} = R.x$ (دستور ۳):

قطاع $AOB = \frac{\widehat{AB}}{2} \times OA = \frac{Rx}{2} \times R = \frac{1}{2} R^2 x$

و چون

پهنهٔ سه‌گوشهٔ $AOB = \frac{1}{2} AB \times OC = \frac{1}{2} OA \times BE = \frac{1}{2} R^2 \sin x$

پس پهنهٔ پارهٔ دایره (سایه‌زده) که تفاضل این دو پهنه است چنین خواهد شد:

پهنهٔ $ABC = \frac{1}{2} R^2 x - \frac{1}{2} R^2 \sin x = \frac{1}{2} R^2 (x - \sin x)$

دراینجا اندازهٔ گوشهٔ AOB را است بحسب رادیان

۶۰ - چقدر است پهنهٔ قطاعی که گوشهٔ مرکزی آن ۳۴° و درازای کمانش ۱۰ متر است؟

۶۱ - در دایره‌ای به پرتو ۸ سانتیمتر دوری زهی از مرکز ۵ سانتیمتر است حساب کنید پهنهٔ کوچکترین پاره‌ای را که این زه از دایره جدا میکند.

۶۲ - پرتو دایره‌ای ۸۳٫۴ سانتیمتر است حساب کنید درازای کمان ۲۳° ۵۴′ و درازای زهٔ این کمان را.

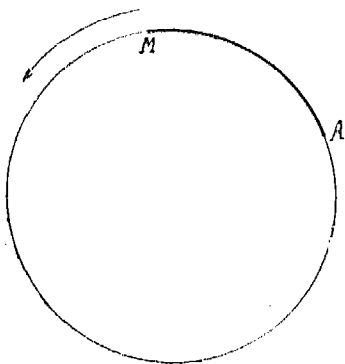
* ۶۳ - بفرض اینکه درازای یک زینه از دایرهٔ استوا ۱۱۲ کیلومتر باشد حساب کنید درازای یک زینه را از مداری که بعرض ۴۵° است.

* ۶۴ - بطور کلی اگر d درازای یک زینهٔ استوا و α عرض مداری باشد ثابت کنید که درازای یک زینه ازین مدار $d.\cos\alpha$ میباشد.

بخش دوّم

پردازشهای مُثلّثاتی گوشه‌ها بطورکلّی

۱۷- سو ونشانهٔ کمانها - اندازهٔ جبری - روی یکّ خط راست برای رفتن از یک نقطهٔ A بیک نقطهٔ دیگر M یک راه بیش نیست و در این راه هم سوی حرکت و هم درازای راه معیّن است.

ولی در روی پیرامون یک دایره (و بطورکلّی روی پیرامون هرخم بسته یعنی هرمنحنی بسته) برای رفتن از یک نقطهٔ A بیک نقطهٔ دیگر M میتوان دو سو بر گزید یکی سُوی حرکت عقربک های ساعت و دیگری سُوی مخالف آن - و در هریک از دو سو درازای راه راهم میتوان بدلخواه - در تحت قانون مُعیّنی تغییر داد.

شکل ۹

در مُثلّثات قرار براین است که سُوی مخالف گردش عقربکهای ساعت را سُوی مثبت بگیرند و آنرا سُوی مثبت مثلثاتی مینامند.

(سُوی تیر در شکل ۹)

بنابرین سوی گردش عقربک های ساعت سوی منفی خواهد بود.

با این قرارداد اندازهٔ جبری راه ها یا کمانهای پیموده شده در سوی مثبت مثلثاتی را مثبت (با نشانهٔ +) و اندازهٔ جبری راهها یا کمانهای پیموده شده در سوی منفی را منفی (با نشانهٔ -) میگیرند.

فرض کنیم اندازهٔ مثبت کمان AM که در شکل ۹ در شت کشیده شده بحسب یکی از یکه های کمان a و اندازهٔ پیرامون دایره بحسب همان یکه c باشد.

برای اینکه متحرکی از A (سرکمان) به M (ته کمان) برود میتواند در سوی مثبت مثلثاتی فقط کمانی برابر a بپیماید و یا اینکه در سوی منفی راهی بپیماید که قدر مطلق آن $a - c$ باشد.

ولی متحرک پیش از اینکه در M بایستد میتواند چند دور تمام در یکی از دو سو بزند. اندازهٔ این دوره ها را میتوانیم بصورت nc بنویسیم که n عدد درست مثبتی است.

پس اندازهٔ راههائیکه در جهت مثبت پیموده میشود بصورت کلی

$a + nc$ نوشته میشود ($n = 0; 1; 2 \ldots\ldots$) و قدر مطلق راههائی که در سوی منفی پیموده میشود بصورت

$$c - a + nc$$

است - پس اندازه جبری این راهها بصورت زیر است :

$$a-(n+1)c \quad \text{و یا} \quad -c+a-nc$$

بنابرین اگر اندازهٔ جبری راهی را که متحرک روی پیرامون دایره می پیماید تا از سر کمان A به تهٔ کمان M برسد به $\widehat{AM}$ نمایش دهیم - سوی حرکت هرچه باشد خواهیم داشت :

$$\widehat{AM} = a + k \times c \qquad (۱۲)$$

k در این دستور عدد درستی است مثبت یا منفی یا صفر: $k = 0; \pm1; \pm2$

و a کوچکترین اندازهٔ مثبت کمان $\widehat{AM}$ است .

دستور (۱۲) اندازه جبری کمانهائی را میدهد که سر همهٔ آنها در A و تهٔ آنها در M باشد (کمانهای AM)

تبصره - اگر سر کمان را M و تهٔ آن را A بگیریم مانند بالا خواهیم دید که اندازهٔ جبری کمانهای MA از دستور $\widehat{MA} = -a + k \times c$ بدست میاید که $-a$ - اندازهٔ جبری کمانیست MA (منفی) که قدر مطلقش از همه کوچکتر باشد .

ورزش

۱ - در یک دایره کمانهای زیر را معین کنید :

۳° ، ۶۰° ، ۳۰۰° ، ۱۹۰- ، ۷۵۰°

۱۳۵- ; و ۸۵۵-

۲- اندازهٔ جبری تمام کمانهائی را که سر و تهٔ آنها روی سر و ته هر یک از کمانهای ورزش (۱) میباشند بنویسید.

۳- این کمانها را با هم جمع کنید (از راه رسم)

۱۲۰° و ۳۰° ; ۱۲۰- و ۶۰° ; ۷۵- و ۹۰°-

۹۰° و ۷۵°- ; ۴۵- و ۱۰۵° ; ۴۵ و ۱۸۰°-

۴۵ و ۱۸۰°

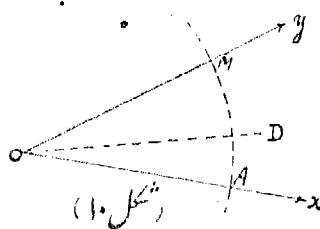
۱۸- از روی دستور (۱۷) دیده میشود که هرگاه سر و تهٔ یک کمان داده شوند اندازهٔ جبری آن میتواند از ∞- تا ∞+ تغییر کند و این است تفاوت میان کمانهای هندسی و مثلثاتی ولی اگر سر کمان (یا تهٔ آن) با اندازهٔ جبری داده شود تهٔ کمان (یا سر آن) کاملاً معین است.

۱۹- صورتهای مختلف دستور (۱۷) بر حسب تغییر کمانها - فرض کنیم اندازهٔ کمان هندسی AM بر حسب رادیان و زینه و گراد بترتیب a و n و n' باشد میدانیم که اندازهٔ پیرامون دایره بحسب این سه یکه بترتیب ۲π و ۳۶۰ و ۴۰۰ گراد است پس اگر در دستور (۱۷) فرض کنیم بترتیب یکه کمان رادیان زینه و گراد باشد باید آن را بترتیب بصورتهای زیر نوشت.

$$\widehat{AM} = \alpha + 2K\pi \qquad (۱۸)$$

$$\widehat{AM} = n^{\circ} + K \times 360^{\circ} \qquad (۱۹)$$

$$\widehat{AM} = n^{g} + K \times 400^{g} \qquad (۲۰)$$

۲۰ـ سو و نشانه و اندازهٔ جبری گوشهٔ دو نیم خط ـ اگر گوشهٔ xoy (گوشهٔ میان دو نیم خط ox و oy) داده شود برای اندازه گرفتن آن میتوان براه زیر عمل کرد: دایره‌ای بمرکز o و پرتو دلخواه میکشیم (شکل ۱۰) تا ox را در A و oy را در M تلاقی کند

(شکل ۱۰)

اندازهٔ کمان هندسی AM همان اندازهٔ گوشهٔ مرکزی xoy است مثلاً اگر اندازهٔ کمان هندسی AM بحسب زینه ۳۰ باشد اندازهٔ گوشهٔ هندسی xoy نیز ۳۰ است

پس همچنانکه اندازهٔ کمان AM برابر راهی است که متحرکی روی آن کمان از A (سر کمان) تا M (تهٔ کمان) می‌پیماید ـ در مورد گوشه هم میتوان گفت که اندازهٔ گوشهٔ xoy برابر گوشه‌ایست که باید بآن اندازه نیم خطی oD را که نخست روی ox (پهلوی نخست گوشه) است دور o گرداند تا بر نیم خط oy (پهلوی دوم) منطبق شود [مثال: عقربک دقیقه‌شمار ساعت در مدت ۲۰ دقیقه ۱۲۰ زینه میگردد و در یکساعت و ۲۰ دقیقه ۴۲۰ زینه]

ولی نیم خط OD را که نخست روی ox میگیریم میتوان دو سو گرداشید تا نیم خط oy منطبق شود: سوی مثبت که همان سوی مثبت مثلثاتی باشد و سوی منفی —
پس مانند آنچه در مورد کمانها گفتیم یک گوشه هم دارای اندازه های جبری بیشمار است که از روی یکی از دستورهای (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) بدست میاید چنین نوشته شود:

$$(۱۸) \qquad \widehat{xoy} = (ox\ ,\ oy) = \alpha + 2K\pi$$

$$(۱۹) \qquad \widehat{xoy} = (ox\ ,\ oy) = n^\circ + K\,360^\circ$$

$$(۲۰) \qquad \widehat{xoy} = (ox\ ,\ oy) = n'^{g} + K\,400^{g}$$

در این جا هم اگر پهلوی نخست را oy بگیریم یعنی اگر اندازه های گوشه های $yox = (oy\ ,\ ox)$ را بخواهیم کافی است در این دستورها بترتیب α و n و n' را به $-\alpha$ و $-n$ و $-n'$ مبدل نمائیم.

و همانطوریکه در مورد کمان گفته شد می بینیم اگر پهلوی نخست و پهلوی دوم یک گوشه را داشته باشیم اندازه جبری آن گوشه میتواند از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند.

و بعکس اگر مثلاً پهلوی نخست و اندازه جبری گوشه ای را داشته باشیم پهلوی دوم کاملاً مشخص است.

ورزش

۱- این گوشه ها را بسازید:

۲۷۰° ، ۳۰۰°- ، ۷۲۰°+ ، ۵۰۰°- ، ۱۲۲۰°- ، ۱۱۱۰° و ۵۰°

این گوشه ها را با هم جمع کنید (از راه رسم):

(۲) ۱۲۰° و ۳۰° (۳) ۱۲۰°- و ۶۰°

(۴) ۷۵°- و ۹۰°- (۵) ۹۰۰° و ۷۵°-

(۶) ۴۵°- و ۱۰۵° (۷) ۴۵° و ۱۸۰°-

با یک نقاله و حاصل جمع زیر را بدست آورید: (بدون اینکه روی کاغذ چیزی بکشید)

(۸) $۲۴° + ۲۳° + (-۳۵°) + ۲۷° + (-۴۰°)$

(۹) $-۱۲۰° + ۵۷° - ۲۱°$

(۱۰) اگر میشد حرکت عقربکهای ساعت را از پشت ساعت هم ببینیم (مثلاً اگر صفحه ساعت شفاف بود) و اگر دو نفر یکی از جلو و دیگری از پشت به ساعت نگاه میکردند آیا بچشم این دو نفر گوشه ای که یکی از عقربکها می پیماید یکسان بود؟

۲۱- اگر در دستور (۱۷) عدد درست k را بترتیب برابر k_1 و k_2 بگیریم دو کمان x_1 و x_2 بدست می آید:

$$x_1 = a + k_1 c$$

$$x_2 = a + k_2 c$$

اگر این دو کمان را از هم کم کنیم خواهیم داشت :

$$x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)c$$

$k_2 - k_1$ عدد درستی است پس تفاضل دو کمان که دارای یک سر و یک ته میباشند مضرب درستی است از پیرامون دایره - همین قضیه در مورد گوشه‌های میان دو نیم خط نیز درست است .

ورزش ۱ - وارون این قضیه را ثابت کنید .

ورزش ۲ - از روی این قضیه روشن سازید که میتوان در دستور (۱۷) a را اندازهٔ جبری یکی از کمانهای AM گرفت - بجای اینکه اندازهٔ کوچکترین کمان مثبت AM باشد - مثلاً اگر یک کمان AM برابر ۱۳۰° باشد اندازهٔ جبری همهٔ کمانهای AM را میتوان نوشت :

$$\widehat{AM} = ۱۳۰° + k\,۳۶۰°$$

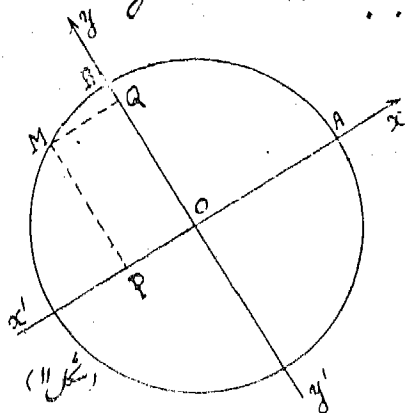
میتوان نیز چنین نوشت

$$\widehat{AM} = -۲۳۰° + k'\,۳۶۰° \quad (\text{عدد درست } K')$$

زیرا ۲۳۰° - اندازهٔ جبری یکی از کمانهای AM است (در ازاء ۱- = K)

۲۲ - دایرهٔ مثلثاتی - دایره‌ایست که پرتو آن برابر یکه درازا باشد و روی پیرامون آن سوی مثبتی برگزیده باشند - این سوی مثبت معمولاً همان سوی

مثبت مثلثاتی سمت یعنی سوی مخالف گردش عقربک های ساعت (شکل ۱۱)

آسه سینوس و آسه سینوس متمم - فرض کنیم روی پیرامون دایره مثلثاتی نقطه A سر کمانهائی باشد - آسه $x'Ox$ را منطبق بر OA و آسه $y'Oy$ را عمود بر آن می کشیم - روی $x'Ox$ سوی مثبت را از O به A میگیریم و روی $y'Oy$ سوی مثبت را طوری میگیریم که OA بتواند پس از گردش ۹۰ درجه در سوی مثبت مثلثاتی روی آن قرار گیرد یعنی بموجب (۲۰) $(Ox, Oy) = +90^\circ$:

آسه $x'Ox$ را آسه سینوس متمم ها و $y'Oy$ را آسه سینوس ها برای کمانهائیکه سر آنها در A است مینامند. (شکل ۱۱)

(شکل ۱۱)

ورزش - کمانهائی در دایره مثلثاتی بگیرید که سر همه در نقطه دلخواهی A و اندازه جبری آنها بترتیب ۳۰° ; ۷۵° ; ۱۲۰° ; ۱۰°- ; ۲۱۰° ; ۱۰۵- ۱۰۵ باشد - نخست آسه سینوس و سینوس متمم این کمانها را بکشید و سپس اگر سر این کمانها را بترتیب نقطه های A_1 و A_2 ..... A_6 بنامیم معین کنید آسه سینوس و سینوس متمم کمانهائی را که سر آنها بترتیب در یکی ازین نقطه ها باشد

سینوس وسینوس متمم - فرض کنیم روی پیرامون دایرهٔ مثلثاتی M تهِ کمان دلخواهی باشد که سرآن در A است ومختصات M نسبت بدو آسه xox و yoy بترتیب

$x = \overline{OP}$ و $y = \overline{OQ}$ باشد (شکل ۱۱)

$\overline{OP}$ (اندازهٔ جبری OP روی آسه x ها) را سینوس متمم $\widehat{AM}$ و $\overline{OQ}$ (اندازهٔ جبری OQ روی آسه y ها) را سینوس $\widehat{AM}$ مینامند :

$$\sin \widehat{AM} = \overline{OQ}$$

$$\cos \widehat{AM} = \overline{OP}$$

یعنی اگر α یکی از اندازه های جبری کمان AM بحسب رادیان باشد خواهیم داشت :

$$\sin\alpha = \overline{OQ}$$

$$\cos\alpha = \overline{OP}$$

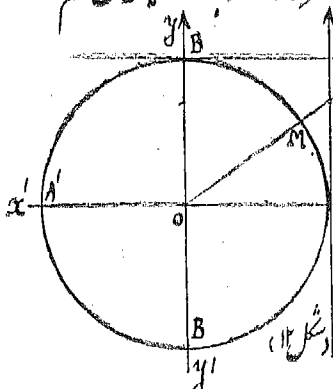
وچون اندازهٔ گوشهٔ مرکزی AOM ویا گوشهٔ (OM , OA) برابر اندازهٔ کمان AM است پردازشهای مثلثاتی این کمان را پردازشهای مثلثاتی آن گوشه هم مینامند وبعکس چنانکه درشکل هم دیده میشود سینوس وسینوس متمم هرگوشه یا کمان عددهائیست جبری که نمی توانند از ۱- کوچکتر ویا

از ۱+ بزرگتر باشد (بعبارت دیگر قدر مطلق آن از ۱ بزرگتر نیست) زیرا هرکجا M را بگیریم نقطهٔ P میان A و A' (و یا روی یکی ازین دو نقطه) بود و نقطهٔ Q نیز میان B و B' و یا روی یکی ازین دو نقطه خواهد بود. و

$OA = OB = 1$ پرتو دایرهٔ مثلثاتی است.

در شکل ۱۱ سینوس $\widehat{AM}$ مثبت و سینوس متمم آن منفی است.

وچون این دو عدد جبری (سینوس و سینوس متمم) با تغییر پیدا کردن کمان (و یا گوشه) تغییر می کنند آنها را پیرو و یا پردازش های مثلثاتی کمان (و یا گوشه) مینامند.

وچون با تعریف بالا پردازشهای مثلثاتی اندازهٔ جبری دو پاره خط میباشند آنهارا خطهای مثلثاتی نیز میگویند.

تانژانت و تانژانت متمم — از A (سر کمان) آسه‌ای همرو (موازی) و همسو با آسهٔ سینوس ها و از B آسه‌ای همرو و همسو با آسهٔ سینوس متمم ها می کشیم (شکل ۱۲) این دو آسه را بترتیب آسهٔ تانژانت ها و آسهٔ تانژانت متمم های کمانهائی مینامند که سر آنها در A باشد حال اگر کمانی AM داشته باشیم OM را

(شکل ۱۲)

می کشیم تا آسه تانژانت ها را در T و آسه تانژانت متمم ها را در S تلاقی کند. $\overline{AT}$ (اندازهٔ جبری AT روی آسه تانژانت ها) را تانژانت $\widehat{AM}$ مینامند و $\overline{BS}$ (اندازه جبری BS روی آسه تانژانت متمم ها) تانژانت متمم $\widehat{AM}$ نامیده میشود.

$$tg\,\widehat{AM} = \overline{AT}$$

$$\cot\widehat{AM} = \overline{BS}$$

مانند آنچه درباره سینوس و سینوس متمم گفتیم اینجا نیز میتوان گفت که تانژانت و تانژانت متمم سری یا پروازشهای کمان (یا گوشه) میباشند و آنها را خطهای مثلثاتی نیز مینامند.

اگر نقطهٔ M تغییر کند و پیرامون دایره مثلثاتی را بپیماید [یعنی اگر $\widehat{AM}$ و یا (OA , OM) همه اندازه های جبری را بگیرد] T تمام آسه تانژانت ها و S تمام آسه تانژانت متمم ها را می پیماید. پس تانژانت و تانژانت متمم برخلاف سینوس و سینوس متمم میتوانند برابر هر عدد جبری گردند (شماره ۲۴ را ببینید)

۲۳ـ نشانه پروازشهای مثلثاتی ـ آسه سینوس متمم ها و آسه سینوس ها پیرامون دایرهٔ مثلثاتی را به چهار بخش میکنند (شکل ۱۲) :

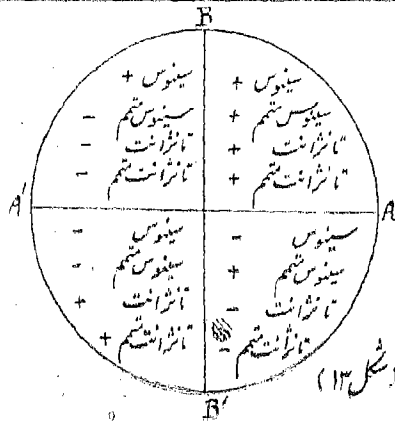
تهِ کمانهائیکه اندازهٔ آنها از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ باشد روی بخش نخست است.

" " " " از $\frac{\pi}{2}$ تا π باشد " " دوّم "

" " " " از π تا $\frac{3\pi}{2}$ باشد " " سوّم "

" " " " از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π باشد " " چهارم "

در روی شکل های (۱۱) و (۱۲) نتیجه های زیر دیده میشود:

تهِ کمان	در بخش نخست	در بخش دوّم	در بخش سوّم	در بخش چهارم
نشانهٔ سینوس	+	+	−	−
" سینوس متمم	+	−	−	+
" تانژانت	+	−	+	−
" تانژانت متمم	+	−	+	−

B

سینوس +   سینوس +
سینوس متمم +   سینوس متمم −
تانژانت +   تانژانت −
تانژانت متمم +   تانژانت متمم −

A'   A

سینوس −   سینوس −
سینوس متمم +   سینوس متمم −
تانژانت −   تانژانت +
تانژانت متمم −   تانژانت متمم +

B'

(شکل ۱۳)

دیده میشود که ۱ـ در بخش نخست هر چهار خط مثلثاتی مثبت است

۲ـ هر چه باشد کمان نشانهٔ تانژانت و تانژانت متمم آن یکیست

پرسش های ساده

۱- در کدام بخش از دایره مثلثاتی سینوس مثبت است؟ در کدام سینوس متمم؟
در کجا تانژانت مثبت است یا منفی؟ در کدام بخش تانژانت متمم؟

۲- آیا گوشه ای هست که تانژانت آن مثبت و تانژانت متمم آن منفی باشد؟

۳- آیا گوشه ای هست که سینوس آن مثبت و سینوس متمم آن منفی باشد؟

۴- هرگاه کمانی (یا گوشه ای) طوری باشد که:

الف - سینوس آن مثبت و تانژانت آن منفی

ب - تانژانت آن مثبت و سینوس متمم آن منفی

ج - تانژانت متمم آن منفی و سینوس آن مثبت

د - سینوس آن مثبت و سینوس متمم آن منفی

تهِ آن کمان در چه بخشی است؟ (یا آن گوشه چه دست؟)

۵- تهِ کمان های α در چه بخش (یا بخشها) است؟ هرگاه

(۱) $\sin\alpha = \frac{1}{۲}$ (۲) $tg\alpha = ۳$ (۳) $\cos\alpha = \frac{1}{۴}$

(۴) $\sin\alpha = -\frac{1}{۲}$ (۵) $\cot\alpha = ۵$ (۶) $tg\alpha = ۰$

(۷) $\cot\alpha = ۰$ (۸) $\cos\alpha = -\frac{1}{۲}$

(۹) $\sin\alpha = \frac{1}{۲}$, $tg\alpha < ۰$ (۱۰) $tg\alpha = ۳$, $\sin\alpha < ۰$

۶- چه کمانهائیست (از ۰° تا ۳۶۰°) که

(۱) تانژانت آن برابر ۱ (۲) تانژانت آن ۱- (۳) سینوس آن $\frac{1}{2}$

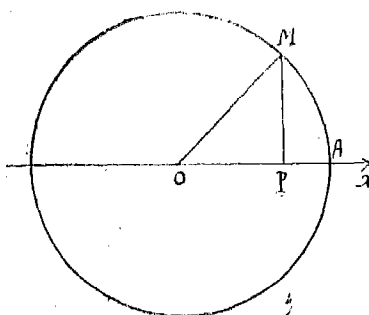
باشد؟ (شماره زینه های این کمانها را بگوئید)

۷- خطهای مثلثاتی کمانها (یا گوشه های) زیر را از روی تعریف بدست آورید:

۹۰° ؛ ۲۷۰° ؛ ۱۸۰° ؛ ۳۶۰°

تبصره - در بخش نخست این کتاب پردازشهای مثلثاتی گوشه های شند (یعنی گوشه هائی را که از صفر بزرگتر و از یک گوشه راست کوچکتر است) تعریف کرده گفتیم که همه آنها مثبت میباشند

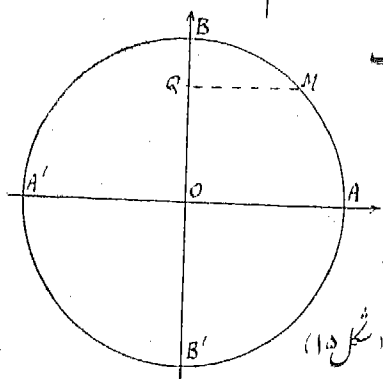
و در بالا پردازشهای مثلثاتی همه کمانها و بنابرین همه گوشه ها را (چه کوچکتر از یک گوشه راست و چه بزرگتر یا چه مثبت و چه منفی) تعریف کردیم و دیدیم هر کدام میتواند مثبت باشد یا منفی. در حقیقت درینجا تعریفهائی را که در بخش نخست کتاب نموده بودیم عمومیت دادیم.

(شکل ۱۴)

درمورد گوشه های تند (یا کمانهای کوچکتر از یک چهارم پیرامون) هر دو تعریف یکیست: مثلاً سینوس گوشه AOM (شکل ۱۴) از روی تعریف بخش نخست کتاب

نسبت $\frac{PM}{OM}$ است و چون در اینجا OM پرتو دایرهٔ مثلثاتیست و برابر یکهٔ درازا پس $\frac{PM}{OM} = PM$ یعنی سینوس گوشهٔ POM برابر است با اندازهٔ هندسی PM که مثبت است و از روی تعریفی هم که اینجا کردیم پردازشهای مثلثاتی گوشه های تند مثبت است.

نیز از اینجا دانستیم که بچه علت پرتو دایرهٔ مثلثاتی را برابر یکهٔ درازا میگیرند.

۲۴- تغییرات پردازشهای مثلثاتی - اگر M ته کمان AM از A آغاز حرکت کند و یک دور پیرامون دایره را بپیماید یعنی کمان AM همهٔ مقدارهای از ۰ تا 2π را بگیرد پردازشهای مثلثاتی این کمان هم تغییر میکنند و مقدارهائیکه این پردازشها میگیرند بآسانی از روی شکل دیده میشود:

الف - تغییرات سینوس - فرض کنیم حرکت M در سوی مثبت مثلثاتی باشد. وقتی M در A است یعنی وقتی کمان AM صفر است Q در O میباشد (شکل ۱۵) و $\overline{OQ}$ صفر است و هر چند M از A دورتر شده به B

(شکل ۱۵)

نزدیک شود Q نیز روی OB از O دورتر شده به B نزدیکتر میشود یعنی وقتی کمان

از صفر ترقّی کند تا به $\frac{\pi}{2}$ برسد سینوس آن از ۰ ترقی میکند و به ۱+ میرسد (۹)

بهمین ترتیب می بینیم وقتی کمان از $\frac{\pi}{2}$ ترقی میکند تا به π برسد سینوس آن از ۱+ تنزّل میکند تا بصفر برسد - وچون کمان از π ترّقی نماید و به $\frac{3\pi}{2}$ برسد سینوس آن از ۰ تنزّل مینماید و به ۱- میرسد .

و هرگاه کمان از $\frac{3\pi}{2}$ ترقّی کند و به 2π برسد سینوس آن از ۱- تا ۰ ترقی میکند :

A	B'	A'	B	A	جای M
2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	۰	اندازهٔ $\widehat{AM}$
۰	۱-	۰	۱	۰	اندازهٔ سینوس $\widehat{AM}$

تبصرهٔ ۱- روشن است که اگر نقطهٔ کمان باز حرکت کند و در A نایستد یعنی اگر اندازهٔ کمان از 2π ترقی نماید سینوس کمان دوباره همان اندازه های پیش را میگیرد [مثلاً $\sin 390° = \sin (360° + 30°) = \sin 30°$] یعنی اگر α یکی از اندازه های جبری $\widehat{AM}$ باشد (بحسب رادیان) بطور کلی خواهیم داشت :

$$\sin (\alpha + 2K\pi) = \sin \alpha$$

گویند سینوس پردازشی است دوره که دورهٔ آن 2π است بدین معنی که هرگاه بر کمان 2π یا مضرب درستی از 2π بیفزائیم و یا از آن بکاهیم در سینوس کمان

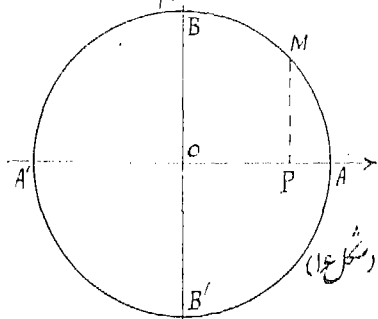
تغییری رخ نمیدهد - و این نتیجه از روی تعریف هم بدست میآید زیرا در تعریف پردازشهای مثلثاتی تنها تهِ کمان بکار میرود نه اندازه جبری آن .

تبصره ۲ - در ضمن بدست آوردن تغییرات سینوس یک کمان دانستیم که برای انتهای میان ۰ و $\frac{\pi}{2}$ تغییرات کمان و تغییرات سینوس آن در یک سو میباشد یعنی اگر کمان ترقی کند سینوس نیز ترقی میکند و بعکس (۹)

تبصره ۳ - نیز در ضمن دیده شد که

$$\sin\frac{\pi}{2}=1 \qquad \sin 0=\sin 2\pi=0$$

$$\sin\frac{3\pi}{2}=-1 \qquad \sin\pi=0$$

ب - تغییرات سینوس متمم - اگر مانند پیش فرض کنیم M یعنی تهِ کمان روی پیرامون دایره یک دور تمام بزند (شکل ۱۶) سینوس متمم کمان چنین تغییر خواهد کرد :

(شکل ۱۶)

جای M	A		B		A'		B'		A
اندازه $\widehat{AM}$	۰	↖	$\frac{\pi}{2}$	↖	π	↖	$\frac{3\pi}{2}$	↖	2π
اندازه سینوس متمم $\widehat{AM}$	1	↙	۰	↙	-1	↖	۰	↖	1

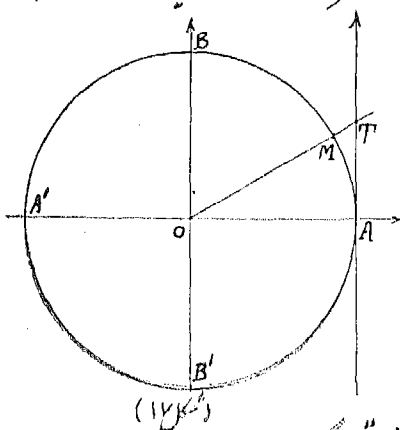
درضمن دیده میشود که از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ سوی تغییرات سینوس متمم کمان وارونهٔ سوی تغییرات کمانست یعنی اگر کمان ترقی کند سینوس متمم آن تنزل میکند و بعکس (۹)

باز دیده شد که

$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

ج - تغییرات تانژانت - اگر مانند پیش M را حرکت دهیم می بینیم :

وقتی که M در A است (شکل ۱۲) $\overline{AT}$ صفر است و وقتیکه M از A دور شده به B نزدیک گردد $\overline{AT}$ از صفر ترقی کرده بزرگ میشود و موقعی که M خیلی نزدیک به B شود $\overline{AT}$ بی اندازه بزرگ میگردد (۹) و اگر M در B باشد خط OM آسه تانژانت ها را تلاقی نمیکند .

(شکل ۱۲)

حال اگر M کمی از B بسوی A' رود امتداد OM آسه تانژانت ها را خیلی دور ولی در طرف منفی تلاقی مینماید یعنی $\overline{AT}$ بحسب قدر مطلق بسیار بزرگ ولی منفی است .

پس هرگاه اندازه کمان کمی کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ بوده و بخواهد ترقی کرده کمی بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ گردد تانژانت آن ناگهان از یک مقدار مثبت بسیار بزرگ به یک مقدار منفی بسیار کوچک (یعنی دارای قدر مطلق بسیار بزرگ) تغییر میکند؛ گوییم تانژانت پردازشی است از کمان بطوریکه وقتی کمان $\frac{\pi}{2}$ باشد منفصل است
بهمین ترتیب می بینیم که هرگاه کمان از $\frac{\pi}{2}$ تا π و از π تا $\frac{3\pi}{2}$ ترقی کند تانژانت آن از یک مقدار منفی بسیار کوچک ($-\infty$) ترقی نموده بصفر میرسد از صفر نیز تا $+\infty$ ترقی میکند.
باز وقتی که M میخواهد از B' بگذرد تانژانت $\overset{\frown}{AM}$ ناگهان از $+\infty$ به $-\infty$ تغییر میکند یعنی در ازاء $\frac{3\pi}{2}$ هم تانژانت منفصل است.
وقتی کمان از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π ترقی کند باز تانژانت از $-\infty$ تا صفر ترقی میکند:

جای M	A		B		A'		B'		A
اندازه $\overset{\frown}{AM}$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
اندازه تانژانت $\overset{\frown}{AM}$	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	0

دیده میشود که تغییرات تانژانت یک کمان و تغییرات خود کمان همه جا در یک سو میباشد – تغییرات تانژانت منحنی – (شکل ۱۸) – همچنانکه در مورد تانژانت دیده

(شکل ۱۸)

شد خواهیم دید که :

(۱) سوی تغییرات تانژانت متمم وارونه سوی تغییرات کمانست یعنی وقتی کمان ترقی مینماید تانژانت متمم آن تنزل میکند و بعکس [خواهیم دید که تانژانت متمم هر کمان وارون تانژانت همان کمانست (شمارهٔ ۲۸ دستور ۷)]

(۲) در ازاء ۰ و π تانژانت متمم منفصل است :

جای M	A	B	A'	B'	A
اندازهٔ $\widehat{AM}$	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$ ↗	π ↗	$3\frac{\pi}{2}$ ↗	2π
تانژانت متمم $\widehat{AM}$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

پرسش

۱- آیا کمانی هست که سینوس آن ۲٫۳ و یا سینوس متمم آن ۳- باشد؟

۲- آیا کمانی هست که تانژانت آن ۴ و یا $\frac{1}{4}$- باشد؟ یا تانژانت متمم آن ۴ و یا $\frac{3}{4}$ باشد؟ اگر هست آنرا روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

۳- کمانهائی را نشان دهید که سینوس آنها $\frac{1}{2}$ است یا سینوس متمم آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تبصره ـ همچنانکه در مورد سینوس دیده شد میتوان دید که سینوس متمم تانژانت

و تانژانت متمم هم پردازشهائی هستند دوره

دوره سینوس متمم مانند دوره سینوس 2π است یعنی

$$\cos(\alpha + 2K\pi) = \cos\alpha$$

دوره تانژانت و تانژانت متمم هر یک π است (از روی یک شکل روشن است):

$$tg(\alpha + K\pi) = tg\,\alpha$$

$$\cot(\alpha + K\pi) = \cot\alpha$$

ورزش

طرف دوم برابرهای زیر را بنویسید:

(۱) $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(۲) $\sin 420^\circ =$ (۳) $\cos 420^\circ =$

(۴) $tg\ 210^\circ =$ (۵) $\cot 225^\circ =$

(۶) $\sin 765^\circ =$ (۷) $\cot 405^\circ =$

(۸) $\cos 135^\circ =$ (۹) $tg\ 690^\circ =$

پاسخ (۲) تا (۹) را میتوان بآسانی از روی یک دایره مثلثاتی داد

(۱۰) $\sin 445^\circ = \sin(360^\circ + 85^\circ) = \sin 85^\circ$

(۱۱) $\sin 270^\circ =$ (۱۲) $\operatorname{tg} 440^\circ =$

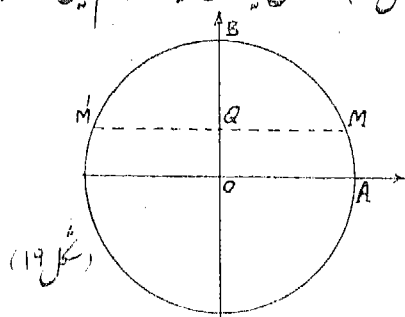
(۱۳) $\operatorname{tg} 710^\circ =$ (۱۴) $\operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{6}) =$

(۱۵) $\cot(n\pi + \frac{\pi}{3}) =$ (۱۶) $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{4}) =$

۲۵- تعیین کمانهائیکه یکی از خطهای مثلثاتی آنها داده شده

مسئلهٔ نخست - بدست آوردن کمانهائی را که سینوس آنها برابر $\frac{1}{3}$ است.

اگر A را سر این کمانها بگیریم (شکل ۱۹) آسههای سینوس و سینوس متمم این کمانها بترتیب

(شکل ۱۹)

آسههای OB و OA پیدا شد
اگر روی آسهٔ OB
عدد جبری $\frac{1}{3}$ را ببریم نقطهٔ
Q بدست میاید ($OQ = \frac{1}{3} OB$)

حال از Q خطی بر OB عمود میکشیم تا پیرامون دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ M و M' تلاقی نماید - تمام کمانهائیکه سر آنها در A و تهٔ آنها یا در M و یا در M' باشد پاسخ مسئله اند زیرا سینوس همهٔ آنها $\overline{OQ}$ است یعنی $\frac{1}{3}$

پس اگر کوچکترین اندازهٔ مثبت کمان AM را α بنامیم (یعنی اگر α کوچکترین کمان هندسی باشد که سینوس آن $\frac{1}{3}$ است - این کمان را میتوان از روی جدول

بدست آورد: α = ۰٫۳۳۹۸ رادیان = ۲۸′ ۱۹°) یکی از کمانهای AM′ برابر $\pi - \alpha$ میباشد و خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = \alpha + 2K\pi$$

$$\widehat{AM'} = \pi - \alpha + 2K'\pi = (2K'+1)\pi - \alpha$$

که چون بجای K و K′ عددهای درست (مثبت یا منفی یا صفر) بگذاریم همهٔ کمانهای پاسخ مسئله بدست میآید: مسئله پاسخهای بیشمار دارد و میتوان اندازهٔ جبری همه را از روی یکی از آنها بدست آورد.

اگر بجای $\frac{1}{2}$ عدد $\frac{1}{2}$ داده شود کوچکترین اندازهٔ مثبت $\widehat{AM}$ به جیب زینه ۳۰ است و خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = 30° + K\,360°$$

$$\widehat{AM'} = 150° + K'\,360°$$

تبصره - چون همواره اندازهٔ جبری سینوس هر کمانی میان ۱- و ۱+ میباشد (یا منتها برابر یکی ازین دو عدد) پس اگر مثلاً بگویند کمانهائی را پیدا کنید که سینوس آنها ۲ و یا $\frac{3}{2}$ — باشد روشن است که پاسخی برای مسئله نخواهیم یافت.

ورزش

پیدا کنید همه کمانهائی را که سینوس آنها یکی ازین عددها میباشد (در حالیکه باید از جدول کمک بگیرید)

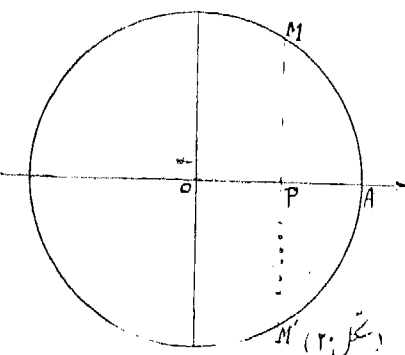
$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و ۰٫۷۰۷۱ و $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و

و ۱ و $\frac{۲}{۷}$

مسئله دوم - بدست آورید همه کمانهائیکه سینوس متمم آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد میدانیم سینوس متمم ۶۰° برابر $\frac{۱}{۲}$ است ولی نباید فوراً گفت که تنها کمان ۶۰° پاسخ مسئله است بلکه مانند پیش خواهیم دید که شماره پاسخ ها بی شمار است چیزی که بست باید داشتن ۶۰° که یکی از پاسخهاست میتوان اندازه جبری همه کمانهای پاسخ مسئله را نوشت.

(شکل ۲۰)

باز اگر سر کمانها در A گرفته شود کافی است روی آسه OA (شکل ۲۰) یعنی آسه سینوس متمم ها OP را برابر عدد جبری $\frac{۱}{۲}$ بگیریم و از P خطی بر OA عمود کنیم تا پیرامون دایره مثلثاتی را در M و M' تلاقی نماید - تمام کمانهائیکه سر آنها در A و ته آنها یا در M و یا در M' باشد پاسخ مسئله اند، چون یکی از کمانهای AM برابر ۶۰° است یکی از کمانهای AM' را میتوان ۶۰°-

گرفت خواهیم داشت :

$$\overset{\frown}{AM} = ۶۰^\circ + K \cdot ۳۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AM'} = -۶۰^\circ + K' \cdot ۳۶۰^\circ$$

یعنی همه کمانها (یا گوشه هائی) که اندازهٔ جبری آنها از دستور

$$\pm ۶۰^\circ + K \cdot ۳۶۰^\circ$$

بدست میآید پاسخ مسئله میباشند .

تبصره - باید در نظر داشت که اندازهٔ جبری سینوس تمّم هم باید همیشه میان ۱- و ۱+ یا منتها برابر یکی از این دو عدد) باشد

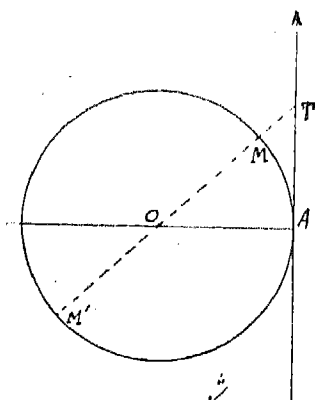
ورزش

پیدا کنید همه کمانهائی (یا گوشه هائی) را که سینوس تمّم آنها یکی از این عددها میباشد .

$\frac{۲}{۳}$; $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$; ۰٫۷۰۷۱ ; $\frac{۱}{۴}$; $\frac{۳}{۵}$; $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۰ ; $\frac{۴}{۹}$; $\frac{۳}{۱۱}$; ۱

مسئلهٔ سوّم - کمانهائی را بدست آورید که تانژانت آنها برابر عدد α میباشد .

عدد جبری α را روی آسهٔ تانژانت ها میبریم تا نقطهٔ T بدست آید ($\overline{AT} = \alpha$) (شکل ۲۱) . وخطّی از T بمرکز دایرهٔ مثلثاتی می کشیم

شکل ۲۱

تا پیرامون آن دایرهٔ در دو نقطهٔ M و M' تلاقی کند - همه کمانهای AM و همه کمانهای AM' پاسخ مسئله میباشند.

اگر α اندازهٔ یکی از کمانهای AM باشد (بحسب رادیان) اندازهٔ یکی از کمانهای AM' را میتوان $\alpha + \pi$ گرفت بنابرین خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} = \alpha + 2K\pi$$

$$\widehat{AM'} = \alpha + \pi + 2K\pi$$

پس اندازهٔ تمام کمانهائیکه پاسخ مسئله‌اند (هم $\widehat{AM}$ و هم $\widehat{AM'}$) از دستور

$$\alpha + K\pi$$

بدست میاید که در آن K عدد لیست درست (مثبت یا منفی یا صفر)

تبصره - هرگاه باشد اندازهٔ عدد جبری a مسئله پاسخ بیشمار دارد که همهٔ آنها را میتوان با داشتن یکی از آنها بدست آورد.

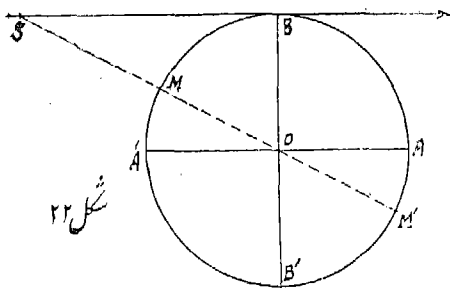
ورزش

کمانهای x را در هریک از حالتهای زیر بدست آورید :

$tg\,x = 1$ $\quad$ $tg\,x = \sqrt{3}$ $\quad$ $tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg\,x = 0$ $\quad$ $tg\,x = 5{,}712$ $\quad$ $tg\,x = 0{,}375$

مسئله چهارم - کمانهائی را بدست آورید که تانژانت متمم آنها برابر عددی c باشد.

کافیست روی آسه تانژانت متمم ها $\overline{BS}$ را برابر عدد جبری c گرفته SO را بکشیم تا نقطه های M و M' بدست آید. (شکل ۲۲)

شکل ۲۲

تمام کمانهای AM و AM' پاسخ مسئله اند.

اگر α یکی از اندازه های $\overline{AM}$ باشد مانند مسئله سوم خواهیم دید که اندازه جبری همه جوابهای مسئله از دستور

$$\alpha + k\pi$$

بدست میآید.

این مسئله هم همیشه پاسخ دارد (هرچه باشد c)

۳۵ - تبصره - چنانکه گفته شد باید در نظر داشت که در هریک از چهار

مسئله بالا اگر یکی از پاسخها را بدانیم از روی آن میتوان باندازهٔ جبری همه پاسخهای آن مسئله را نوشت.

ورزش

۱- میان °۰ و °۳۶۰ گوشه هائی بدست آورید که

(۱) سینوس آنها $\frac{۱}{۲}$ باشد یا $-\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ یا $-\frac{۱}{۳}$

(۲) تانژانت آنها ۱ باشد یا ۱- یا $\sqrt{۳}$ یا ۳

۲- پیدا کنید همه کمانهائی را که سینوس آنها $\frac{۱}{۲}$ و سینوس متمم آنها $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است

یا همه کمانهائیرا که سینوس آنها $\frac{۱}{۲}$ - و سینوس متمم آنها $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۲۷- معمولاً همه کمانهائیرا که سینوس آنها عدد a باشد چنین مینویسند:

$arc\ sin\,a$ (یعنی کمانهائیکه سینوس آنها a است) و نیز مینویسند

$arc\ cos\,a$ (یعنی کمانهائیکه سینوس متمم آنها a است)

$arc\ tg\,a$ (یعنی کمانهائیکه تانژانت آنها a است)

$arc\ cot\,a$ (یعنی کمانهائیکه تانژانت متمم آنها a است)

پس مثلاً بنابرآنچه میدانیم

$$arc\ tg\,۱ = \frac{\pi}{۴} + k\pi = ۴۵^\circ + k \cdot ۱۸۰^\circ$$

ورزش - عبارت کلی کمانهای زیر را بنویسید.

$arc\ sin\ \frac{۱}{۲}$ $arc\ tg\ \sqrt{۳}$

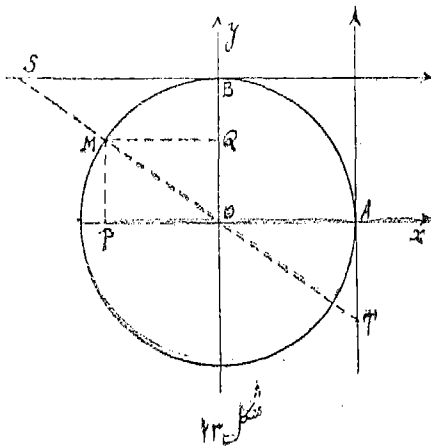
$arc\ cot\ \sqrt{۳}$ $arc\ cos\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$arc\ cos\ \frac{۴}{۵}$ $arc\ sin\ \frac{۳}{۵}$

۲۸- بستگیهای میان خطهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه)

الف- اگر مطابق معمول تصویر M تهٔ کمان AM را روی آسهٔ سینوس متمم ها P و روی آسهٔ سینوس ها Q بنامیم (شکل ۲۳) واگر کمان AM را به x نمایش دهیم میدانیم که

$$\sin x = \overline{OQ}$$

$$\cos x = \overline{OP}$$

شکل ۲۳

ولی هرچه باشد اندازهٔ x (و یا M روی پیرامون دایرهٔ مثلثاتی هرجا باشد) از سه بر OQM که در آن QM برابر OP است نتیجه میشود:

$$\overline{OP}^{۲} + \overline{OQ}^{۲} = \overline{OM}^{۲} = ۱$$

وچون درهمه حال $|\cos x| = OP$ و $|\sin x| = OQ$

پس $\overline{OP}^2 = \cos^2 x$ و $\overline{OQ}^2 = \sin^2 x$ ونابرین

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (۱۱)$$

این همان بستگی (۱۱) از شماره (۱۳) است - پس کمان (یاگوشه) هرچه باشد خواه کوچکتر از یک چهارم پیرامون دایره (ویاکوچکتر ازگوشه راست) خواه بزرگتر از آن خواه مثبت وخواه منفی همیشه مجموع توانهای دوم سینوس وسینوس متمم آن برابر یک است .

ب - از تشابه سه بر های OPM و OAT (شکل ۲۳) داریم :

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA}$$ ولی $OA = 1$ ودرهمه حال

$$PM = OQ = |\sin x| \quad \text{و} \quad OP = |\cos x| \quad \text{و} \quad AT = |\operatorname{tg} x|$$

پس $$\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| = |\operatorname{tg} x|$$

وبامراجعه به نشانه خط های مثلثاتی (شماره ۲۴) ویاباکشیدن شکل های مختلف دیده میشود که همیشه نشانه تانژانت یک کمان بانشانه بهر سینوس آن برسینوس متمم آن یکیست پس برابری بالا نه تنها ازحیث قدرمطلق بلکه ازحیث نشانه هم درست است ومیتوان نوشت :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (۵)$$

و این همان دستور (۵) از شمارهٔ ۸ است پس کمان (یا گوشه) هرچه باشد تانژانت آن برابر بهر سینوس آن بر سینوس متمم آنست.

ج - مانند بالا میتوان از تشابه سه برهای OQM و OBS (شکل ۲۳) ثابت نمود که

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (۶)$$

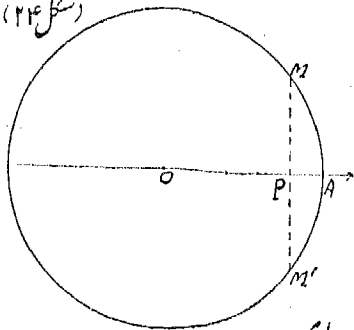
اینهم دستور (۶) از شمارهٔ (۸) است - پس تانژانت متمم هر کمان (یا هر گوشه) برابر است با بهر سینوس متمم آن بر سینوس آن.

از سنجیدن دو بستگی (۵) و (۶) با همدیگر می بینیم که برای هر کمان یا هر گوشه

$$\boxed{tg\,x = \frac{1}{\cot x}} \quad \text{و یا} \quad \boxed{tg\,x . \cot x = 1} \quad (۷)$$

(۱۴) **تبصره** - همچنانکه در مورد خطهای مثلثاتی یک گوشه تند گفته شد اگر یکی از پردازشهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه) بدست باشد و اگر بدانیم تهٔ آن در چه بخشی از پیرامون دایرهٔ مثلثاتیست میتوان از روی بستگیهای (۱۱) و (۵) و (۷) دیگر خطهای مثلثاتی آن کمان را حساب کرد.

مثال - سینوس متمم کمانی که ما آن را a بنامیم $\frac{4}{5}$ است میخواهیم پردازشهای دیگر a را حساب کنیم - نخست از روی (۱۱) $\sin a$ بدست میآید:

$\sin a = \pm \frac{3}{5}$ و سپس از روی (۵) $tg\,a = \pm \frac{3}{4}$

(شکل ۲۴)

با نگاهی بشکل ۲۴ که در آن $\overline{OP}$ برابر $\frac{4}{5}$ است می بینیم a میتواند برابر یکی از کمانهای AM و یا برابر یکی از کمانهای AM' باشد- اگر a برابر یکی از کمانهای AM باشد (تهٔ کمان در بخش نخست) همهٔ پروازشهای a مثبت بوده باید نشانهٔ $+$ را جلوی $\sin a$ و $tg\, a$ گذاشت:

$$\sin a = \frac{3}{5} \qquad tg\, a = \frac{3}{4} \qquad \cot a = \frac{4}{3}$$

و اگر a برابر یکی از کمانهای AM' باشد (تهٔ کمان در بخش چهارم) نشانهٔ - باید گرفته شود:

$$\sin a = -\frac{3}{5} \qquad tg\, a = -\frac{3}{4} \qquad \cot a = -\frac{4}{3}$$

ورزش

خطهای مثلثاتی دیگر x را حساب کنید بفرض اینکه

(۱) $\sin x = \frac{1}{3}$ و $\cos x < 0$

(۲) $\cos x = \frac{2}{11}$ و $\sin x < 0$

(۳) $tg\, x = -3$ و $\sin x > 0$

(۴) $\cot x = +2$ و $\cos x < 0$

(۵) $\sin x = \frac{15}{17}$ و $\cos x < 0$

(۶) $\cos x = \frac{-21}{29}$ و $\sin x < 0$

(۷) $tg\, x = \frac{9}{40}$ و $\sin x > 0$

(۸) $\cot x = \frac{a}{b}$ و $\cos x < 0$

و در هر یک ازین حالتها بگویید ته کمان های x در چه بخشی از پیرامون دایرهٔ مثلثاتی است.

د ـ از تقسیم کردن دو طرف بستگی (۱۱) بر $\cos^2 x$ نتیجه میشود:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و یا بنابر بستگی (۵)

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (21)$$

همچنین از تقسیم کردن دو طرف (۱۱) بر $\sin^2 x$ این نتیجه بدست میآید:

$$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad (22)$$

ورزش

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمایید:

(۱) $\cos a \cdot tg\, a = \sin a$

(۲) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

$$tg\,x \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \qquad (۳)$$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad (۴)$$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{4\,tg\,x}{\cos x} \qquad (۵)$$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x} \qquad (۶)$$

$$(\sin x + \cos x)(tg\,x + \cot x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \qquad (۷)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} + tg^2 x \qquad (۸)$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin y}{1+\sin y}} = \frac{1}{\cos y} - tg\,y \quad [\cos y > 0] \qquad (۹)$$

$$\frac{1+\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a}{1-\sin a} \qquad (۱۰)$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = 2\sin^2 a - 1 \qquad (۱۱)$$

$$tg\,a + \cot a = \frac{1}{\cos a \cdot \sin a} \qquad (۱۲)$$

$$(x \sin a + y \cos a)^2 + (x \cos a - y \sin a)^2 = x^2 + y^2 \qquad (۱۳)$$

$$1 - \cot^4 a = \frac{2}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin^4 a} \qquad (۱۴)$$

$$tg^2 x - \sin^2 x = tg^2 x \cdot \sin^2 x \qquad (۱۵)$$

$$(1+\sin y)(1+\cos y) = (1+\sin y + \cos y)^2 \qquad (۱۶)$$

$$\frac{1-tg\,a}{1+tg\,a} = \frac{\cot a - 1}{\cot a + 1} \qquad (۱۷)$$

$$\cos x = \frac{\pm \cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \qquad (۱۸)$$

$$\sin x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} = \frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \qquad (۱۹)$$

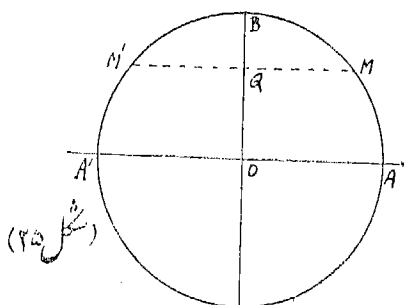
$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\pm \sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \qquad (۲۰)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \cot^2 x - \operatorname{tg}^2 x \qquad (۲۱)$$

(۲۲) عبارت $\sin^2 x + \cos x$ را بحسب $\cos x$ تنها بنویسید.

(۲۳) عبارت $\frac{1+\cot^2 x}{\sin x}$ را بحسب $\sin x$ بنویسید.

۲۹ - بستگی میان خط های مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه ها)

الف - کمانهای مکمّل - اگر AM و AM' دو کمانی باشند که سر هر دو در A و ته آنها M و M' طوری باشند که زه MM' موازی قطر OA باشد (شکل ۲۵)

(شکل ۲۵)

میتوان اندازهٔ جبری همهٔ کمانهای AM و AM' را باین صورت نوشت (شمارهٔ ۲۵ مسئلهٔ نخست):

$$\overset{\frown}{AM} = a + kc$$

$$\overset{\frown}{AM'} = \frac{c}{2} - a + k'c$$

زیرا بفرض اینکه یکی از اندازه های $\overset{\frown}{AM}$ برابر a باشد یکی از اندازه های کمان AM' برابر $\frac{c}{2} - a$ است (ورزش دوم شمارهٔ ۲۱)

اگر اندازهٔ یکی از کمانهای AM' را بر اندازهٔ یکی از کمانهای AM بیفزاییم خواهیم داشت:

$$\widehat{AM} + \widehat{AM'} = (2K + 2K' + 1)\frac{\pi}{2}$$

یعنی هرگاه دو کمان دارای یک سر A بوده و انتهای آنها قرینهٔ یکدیگر باشند نسبت به قطر عمود بر OA - مجموع آن دو کمان مضرب تاقیست از نیمهٔ پیرامون دایره (زیرا K و K' هرچه باشند عدد $2K + 2K' + 1$ تاق است).

ورزش - وارون این قضیه را ثابت کنید.

بطور کلی هرگاه مجموع اندازه های جبری دو کمان مضرب تاقی از نیمهٔ پیرامون باشد آن دو کمان را مکمل یکدیگر خوانند.

پس اگر اندازهٔ کمانی مانند AM بحسب رادیان x باشد و $\widehat{AM'}$ اندازهٔ کمان مکمل آن باشد خواهیم داشت:

(شکل ۲۶)

$$\widehat{AM'} = (2K + 1)\pi - x$$

که در آن K عدد درستی است.

از روی شکل ۲۶ یا ۲۵ پیداست که دو کمان

مکمل دارای یک سینوس میباشند یعنی

$$\sin x = \sin\left[(2K+1)\pi - x\right]$$

و همچنین دیده میشود که سینوس متمم دو کمان مکمل دو عدد قرینه میباشند

$$\cos x = -\cos\left[(2K+1)\pi - x\right]$$

و نیز میبینیم $\overline{AT}$ و $\overline{AT'}$ دو عدد قرینه اند یعنی

$$tg\, x = -tg\left[(2K+1)\pi - x\right]$$

و همچنین $\overline{BS} = -\overline{BS'}$ یعنی

$$\cot x = -\cot\left[(2K+1)\pi - x\right]$$

اگر بخصوص در این بستگیها K را صفر بگیریم بستگیهای زیر را خواهیم داشت :

$$(23)\quad \begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ tg(\pi - x) = -tg\, x \\ \cot(\pi - x) = -\cot x \end{cases}$$

خلاصه اینکه دو کمان مکمل دارای یک سینوس میباشند در صورتیکه دیگر پروازشهای مثلثاتی آن دو قرینهٔ یکدیگرند .

تبصره - در جدولهای خطهای مثلثاتی که یکی از آنها در آخر کتاب است معمولاً

خطهای مثلثاتی کمانها یا گوشه های از ۰° تا ۹۰° نوشته شده است ولی اگر اندازهٔ گوشه یا کمان منفی باشد ویا اگر از ۹۰° بزرگتر باشد برای خطهای مثلثاتی آن جدول مخصوصی نیست و باید از همان جدولها استفاده کرد .

از روی نتیجه ای که برای دو کمان مکمل بدست آوردیم بویژه میتوان خطهای مثلثاتی کمانها یا گوشه های از ۹۰° تا ۱۸۰° را هم از روی جدول پیدا کرد زیرا قدر مطلق خطهای مثلثاتی هم نام دو کمان مکمل یکی است .

مثلاً اگر بخواهیم خط های مثلثاتی ۱۳۱° را پیدا کنیم چون

$$۱۳۱° = ۱۸۰° - ۴۹°$$

کافیست خطهای مثلثاتی ۴۹° را از روی جدول پیدا کرده پس از روی دستورهای (۲۳) خطهای مثلثاتی ۱۳۱° را بنویسیم :

$\sin ۴۹° = ۰٫۷۵۴۷$ $\cos ۴۹ = ۰٫۶۵۶۱$ $tg\, ۴۹° = ۱٫۱۵۰۴$ $\cot ۴۹° = ۰٫۸۶۹۳$

پس

$$\sin ۱۳۱° = \sin ۴۹° = ۰٫۷۵۴۷$$

$$\cos ۱۳۱° = -\cos ۴۹° = -۰٫۶۵۶۱$$

$$tg\, ۱۳۱° = -tg\, ۴۹° = -۱٫۱۵۰۴$$

$$\cot ۱۳۱° = -\cot ۴۹° = -۰٫۸۶۹۳$$

ورزش - خط های مثلثاتی کمانهای زیر را بدست آورید :

۱۲۲° ۳′	۱۱۵° ۱۸′	۹۳° ۳۲′
۱۶۳° ۵′	۱۵۰°	۱۳۵°

ب - کمانهای قرینه - اگر AM و 'AM دو کمانی باشند که سر آنها در A و ته آنها نسبت به قطر OA قرینه باشند آن دو کمان را قرینه هم خوانند (شکل ۲۲) و میتوان اندازه جبری همه کمانهای AM و 'AM را بترتیب چنین نوشت :

$$\widehat{AM} = a + kc$$

$$\widehat{AM'} = -a + k'c$$

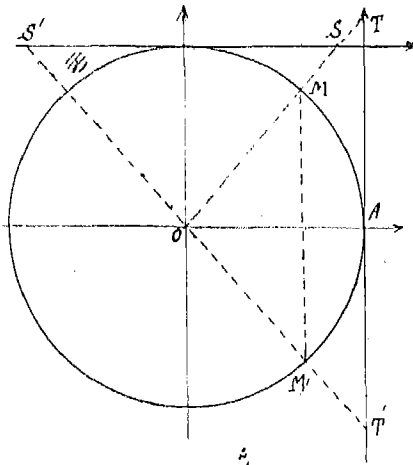
پس اگر اندازه یکی از کمانهای AM را با اندازه یکی از کمانهای 'AM بیفزائیم خواهیم داشت :

$$\widehat{AM} + \widehat{AM'} = (k + k')c$$

یعنی مجموع هر دو کمان قرینه مضرب درستی است از پیرامون دایره

ورزش - وارون این قضیه را ثابت کنید .

پس اگر اندازه کمانی مانند AM بحسب رادیان x باشد و $\widehat{AM'}$ اندازه قرینه آن باشد خواهیم داشت :

$$\widehat{AM'} = 2k\pi - x$$

(شکل ۲۷)

این جا هم از روی شکل دیده میشود که دو کمان قرینه دارای یک سینوس متمم بوده ولی دیگر پردازشهای مثلثاتی آنها قرینه هم میباشند

$$\sin(2K\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos(2K\pi - x) = \cos x$$

$$tg(2K\pi - x) = -tg\, x$$

$$\cot(2K\pi - x) = -\cot x$$

اگر بخصوص در این بستگیها k را صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$(24)\quad \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ tg(-x) = -tg\, x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

تبصره - از روی دستورهای (۲۴) میتوان بکمک جدول خطهای مثلثاتی گوشه‌ها یا کمانهای منفی را بدست آورد مثلاً

$$\sin(-49^\circ) = -\sin 49^\circ = -0.7547$$

ورزش

۱- برابرهای هر یک از خطهای مثلثاتی زیر را بحسب خط مثلثاتی گوشه قرینه بنویسید

(۱) $\cos(-43^\circ)$ (۲) $tg(-61^\circ)$ (۳) $\sin(-47^\circ)$

(۴) $\cot(-85^\circ)$ (۵) $tg\ 49^\circ$ (۶) $tg(a-b)$

(۷) $\cos(a-\frac{\pi}{2})$ (۸) $\sin(b-\pi)$

۲- اندازه عددی خطهای مثلثاتی زیر را بگویید :

(۱) $\cos(-30^\circ)$ (۲) $\cot(-45^\circ)$ (۳) $tg(-60^\circ)$

(۴) $\sin(-60^\circ)$ (۵) $tg(-90^\circ)$ (۶) $\sin(-45^\circ)$

(۷) $\sin(-120^\circ)$ (۸) $\cos(-135^\circ)$ (۹) $tg(-150^\circ)$

۳- اندازه عددی هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید :

(۱) $tg(-60^\circ) \times \sin(-30^\circ) : \sin 60^\circ$

(۲) $\sin 90^\circ \times \sin(-90^\circ) : tg(-45^\circ)$

(۳) $\sin^2(-45^\circ) : \sin(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ)$

(۴) $\sin^2(-45^\circ) : \cos^2(-45^\circ) + tg(-45^\circ)$

(۵) $\sin(-90^\circ) - tg^2(120^\circ) + \frac{1}{\cos^2(120^\circ)}$

ج - کمانهائیکه ته آنها نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینه اند -

اگر AM و AM' دو کمانی باشند که سر هر دو در A و ته آنها M و M' قرینهٔ یکدیگر باشند نسبت بمرکز دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۲۸) میتوان اندازهٔ جبری همهٔ کمانهای AM و AM' را چنین نوشت:

$$\overset{\frown}{AM} = a + kc$$

$$\overset{\frown}{AM'} = \frac{c}{2} + a + k'c$$

(زیرا یکی از اندازه های کمان AM' برابر $a + \frac{c}{2}$ است)

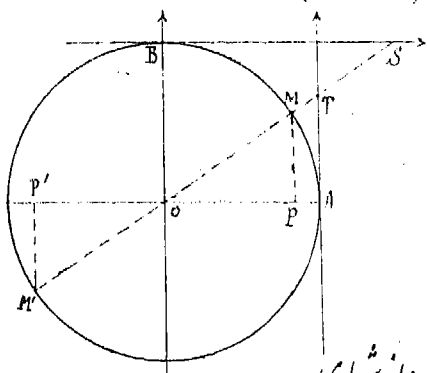
اگر یکی از کمانهای AM' را از یکی از کمانهای AM کم کنیم خواهیم داشت:

$$\overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{AM'} = (2k - 2k' - 1)\frac{c}{2}$$

یعنی هرگاه دو کمان دارای یک سر باشند و ته آنها نسبت بمرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ همدیگر باشند تفاضل آنها مضرب تاقی از نیم پیرامون است (زیرا k و k' هرچه باشد عدد $2k - 2k' - 1$ تاق است).

ورزش - وارون این قضیه را ثابت کنید

پس اگر x رادیان اندازهٔ کمانی مانند AM باشد اندازهٔ AM' چنین خواهد شد:

$$\widehat{AM'} = (2K+1)\pi + x$$

(شکل ۲۸)

این جا هم از روی شکل می بینیم که تانژانت و تانژانت متمم کمانهای AM بترتیب با تانژانت و تانژانت متمم کمانهای AM' برابرند ولی دیگر پردازشهای مثلثاتی آنها قرینه هم میباشند

$$\sin\left[(2K+1)\pi + x\right] = -\sin x$$

$$\cos\left[(2K+1)\pi + x\right] = -\cos x$$

$$tg\left[(2K+1)\pi + x\right] = tg\, x$$

$$\cot\left[(2K+1)\pi + x\right] = \cot x$$

بخصوص اگر K را صفر بگیریم یعنی اگر تفاضل $\widehat{AM}$ و $\widehat{AM'}$ را π بگیریم خواهیم داشت:

$$(۲۵)\quad \begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \\ tg(\pi + x) = tg\, x \\ \cot(\pi + x) = \cot x \end{cases}$$

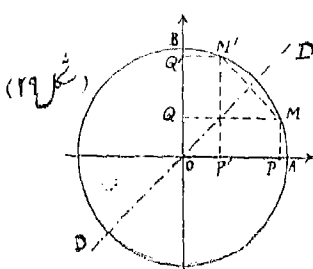
تبصره - از روی دستورهای ۲۵ میتوان کمک جدول خطهای مثلثاتی گوشه‌ها یا کمانهای میان ۱۸۰° و ۲۷۰° را بدست آورد.

ورزش

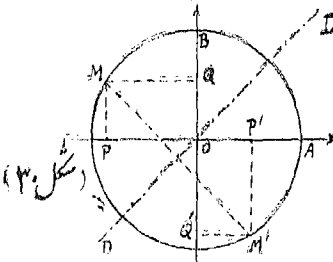
۱- خط‌های مثلثاتی کمان‌های زیر را بنویسید:

۲۱۰°　　۲۲۵°　　۲۴۰°　　۲۳۲° ۴۱′

۲- بفرض اینکه a گوشهٔ شدی باشد از روی خط‌های مثلثاتی a - ۹۰° خط‌های مثلثاتی a - ۲۷۰° را بدست آورید (بحسب خط‌های مثلثاتی a) و درستی نتیجه را از روی یک شکل بررسی نمائید - وحساب کنید خطهای مثلثاتی کمانهای زیر را:

۲۷۰° - ۶۰°　　۲۷۰° - ۴۵°　　۲۷۰° - ۳۰°

د- کمانهای متمم - اگر M و M′ دو کمان AM و AM′ قرینه یکدیگر باشند نسبت به D نیمساز گوشهٔ میان دو آسنه OA و OB گوئیم این دو کمان متمم یکدیگرند (شکل ۲۹ و ۳۰)

اگر a اندازهٔ کوچکترین کمان مثبت AM باشد یکی از اندازه‌های

(شکل ۲۹)

(شکل ۳۰)

کمان AM' خواهد شد $\frac{c}{4} - a$ و بنابرین خواهیم داشت :

$$\widehat{AM} = a + k \times c$$

$$\widehat{AM'} = \frac{c}{4} - a + k' \times c$$

پس
$$\widehat{AM} + \widehat{AM'} = \frac{c}{4} + (k + k') \cdot c$$

و یا اگر یکه کمان را رادیان بگیریم

$$\widehat{AM} + \widehat{AM'} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

که k عدد درستی است .

یعنی مجموع دو کمان متمم برابر است با مجموع یک چهارم پیرامون دایره و k دور پیرامون .

که در آن k عددیست مثبت یا منفی یا صفر .

ورزش ۱ـ در شکل ۲۹ M و M' را در بخش اول گرفتیم بررسی کنید که اگر هر دو در بخش سوم باشند و یا یکی در بخش دوم و دیگری در بخش چهارم (شکل ۳۰) در نتیجه ای که بدست آوردیم تغییری رخ نخواهد داد .

ورزش ۲ـ وارون این قضیه را ثابت کنید .

پس اگر x رادیان اندازه یکی از کمانهای AM باشد اندازه کمانهای AM' چنین است :

$$\widehat{AM'} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - x$$

از روی شکل های بالا می بینیم که OP قرینه OQ' است نسبت به نیمساز D و OQ قرینه OP' است نسبت بهمان خط - پس قدر مطلق سینوس متمم کمانهای AM برابر قدر مطلق سینوس کمانهای AM' است و همچنین قدر مطلق سینوس $\widehat{AM}$ برابر قدر مطلق سینوس متمم $\widehat{AM'}$ میباشد - بعلاوه در شکل های مختلف دیده میشود که نشانه این پردازشها نیز یکیست - یعنی هم از حیث قدر مطلق و هم از حیث نشانه خواهیم داشت

و بنابرین

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - x\right) = \sin x$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - x\right) = \cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - x\right) = tg\, x$$

این دو اتحاد اخیر را از روی شکل هم میتوان بدست آورد.

اگر بخصوص در این بستگی ها k را صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$(۸)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg\, x \end{cases}$$

که همان اتحادهای (۸) از بخش نخست کتابست (شماره ۸) که می بینیم
درمورد هر کمان (یا گوشه) درست است خواه اندازه کمان میان صفر و یک چهارم
پیرامون باشد خواه نباشد

هـ - کمان هائی که تفاضل آنها برابر یک چهارم پیرامون است - اگر
دراتحادهای (۸) x را به $x-$ مبدل کنیم خواهیم داشت:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(-x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(-x)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cot(-x)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=tg(-x)$$

ویا بموجب بستگی های (۲٤)

$$(۲۶)\qquad \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\ tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-tg\,x\end{cases}$$

تبصره - میتوان نیز برای بدست آوردن پردازشهای مثلثاتی $\frac{\pi}{2}+x$
آنرا بصورت $(-x)-\frac{\pi}{2}$ نوشت و دستورهای (۸) و (۲٤) را بکار

برو مثلاً

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\cos(-x)=\cos x$$

از روی شکل هم میتوان بهمین نتیجه رسید.

۳۰- دستورهای (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۸) و (۲۶) را میتوان بطور

خلاصه چنین فرا گرفت:

اگر x را بمضرب جفتی از $90°$ بیفزائیم یا از آن کم کنیم کمانی بدست میاید که پردازشهای آن همنام با پردازشهای خود x و اگر x را به مضرب تاقی از $90°$ بیفزائیم یا از آن کم کنیم پردازشهای مثلثاتی کمان حاصل همنام پردازشهای متمم x میباشند

و برای بدست آوردن نشانه پردازشهای نتیجه کافیست که فرض کرد که اندازه x میان $0°$ و $90°$ است و دید آیا جای تهٔ کمان حاصل در چه بخشی از پیرامون دایره مثلثاتیست.

مثلاً

$$\cos(270°-x)=\cos(3\times 90°-x)=-\sin x$$

$$\sin(-180°+x)=\sin(-2\times 90°+x)=-\sin x$$

ورزش

۱- بوسیله دایره مثلثاتی - با فرض اینکه a گوشه تندی باشد - هر یک از عبارتهای زیر را بحسب خطهای مثلثاتی a حساب کنید و درستی نتیجه را از روی دستورهای بالا و به کمک شماره ۳۰ بررسی نمائید :

$$\cot(540^\circ + a)\ ;\ \sin(270^\circ + a)\ ;\ tg(450^\circ - a)\ ;\ \cos(180^\circ - a)$$

$$\sin(-270^\circ + a)\ ;\ \cos(270^\circ - a)$$

۲- عبارتهای زیر را حساب کنید :

$$\cot 120^\circ \times tg 45^\circ \times \sin 60^\circ$$

$$\cot 135^\circ \times tg 135^\circ \times \sin 60^\circ$$

$$\cot 45^\circ + tg 135^\circ - \cos 180^\circ$$

$$(tg 120^\circ + tg 135^\circ)(tg 120^\circ - tg 135^\circ)$$

۳- از روی یک دایره مثلثاتی برابریهای زیر را ثابت کنید :

$$\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = -\sin(-60^\circ)$$

$$\sin 115^\circ = \cos(-25^\circ) = \cos 25^\circ$$

$$\sin(-15^\circ) = \sin 195^\circ = -\cos 15^\circ$$

$$tg(-60^\circ) = -tg 60^\circ = tg 120^\circ$$

۴- به کمک دایره مثلثاتی و نیز از روی دستورهای بالا خطهای مثلثاتی زیر را نخست به حسب

خطهای مثلثاتی گوشه تند بدست آورده و سپس آنها را حساب کنید . (اگر لازم باشد از روی جدول) :

$tg\ 420°\ 24'$; $\sin(-364')$; $\cos 214°$

$\cos(-210°\ 40')$; $\cos(-800°)$; $tg(-220°)$

$\sin(-510°)$; $\cos(-520°)$; $tg\ 114°$

۵ - درستی برابریهای زیر را بررسی نمایید :

$$tg\ 300° \times \sin 210° = -\cos 210°$$

$$\cos 240° \times \cos 225° = \cos 315° \times \cos 300°$$

$$tg\ 210° \times \cos 330° = tg\ 150° \times \cos 150°$$

$$\sin 225° \times \cos 210° + \cos 315° \times \sin 300° = 0$$

$$\sin 210° \times tg\ 225° + \cot 315° \times \cos 300° = -1$$

$$\cos 570° \times \sin 510° = \sin 330° \times \cos 390°$$

$$\frac{1}{\sin(270°-a)} + \frac{\sin(180°-a)}{\sin(270°-a)} \cdot tg(90°+a) = 1 - \frac{1}{\cos(-a)}$$

$$\frac{\cos(180°+a)}{\cos(-a)} + \frac{2\sin(-a)}{\cos(90°+a)} - \frac{\cot(-a)}{tg(270°+a)} = 0$$

۶ - از برابری $a + b + c = 180°$ برابریهای زیر را نتیجه بگیرید :

$$\sin\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}$$

$$\sin\frac{b}{2} = \cos\frac{a+c}{2}$$

$$\sin a = \sin (b + c)$$

$$\cos a = -\cos (b + c)$$

$$tg\, a = -tg (b + c)$$

$$\sin a = -\sin (2a + b + c)$$

$$\cos a = -\cos (2a + b + c)$$

$$\cos \frac{b-c}{2} = \sin \frac{a+2b}{2} = \sin \frac{a+2c}{2}$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = -\cos \frac{2a+c}{2} = \cos \frac{c+2b}{2}$$

$$\cos b = \sin \frac{a+4b+c}{2}$$

۳۱- از آنچه در شماره های ۲۹ و ۳۰ گفتیم و همچنین از ورزشهای چنین نتیجه میگیریم که میتوان پردازشهای مثلثاتی هرکمان (یا هرگوشه) را به گ که خطهای مثلثاتی کمانهای از ۰ تا ۹۰ رامید بدست آورد.

ورزش

خطهای مثلثاتی گوشه های زیر را حساب کنید:

-(۹۴۵ ۳۷) ; -۷۳° ; ۱۰۰°

۸۴۵ , ۷۵۱° ۴۷ ; ۶۳° ; ۵۳۸° ۴۳′

-۳۱۵° ; -۲۲۴′ ; -۱۳۹′ ; -(۳۷′ ۵°)

بخش سوم

تصویر

۳۲ - بُردار - بُردار پاره خطّی را گویند که سر و ته آن معین باشد. مثلاً از پاره خطّی که دو نقطهٔ A و B را بهم می‌پیوندد دو بُردار پیدا میشود یکی آنکه سر آن A و ته آن B است و آن را بُردار AB خوانده چنین می‌نویسند.

$$\overrightarrow{AB}$$

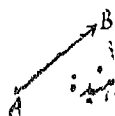
دیگر آنکه سر آن در B و ته آن در A باشد و آن بُردار BA خوانده میشود و می‌نویسند

$$\overrightarrow{BA}$$

سوی بُردار - آن سوئی است که در آن سو یک متحرک برای پیمودن پاره خط از طرف سر بُردار بسوی ته آن حرکت میکند مثلاً سوی $\overrightarrow{AB}$ (بُردار AB) سوی حرکت از A است بطرف B و سوی $\overrightarrow{BA}$ سوی حرکت از B بطرف A است

راستای بُردار - راستای هر خط همسر و پاره خط AB را راستای بردار AB و یا راستای بُردار BA میخوانیم.

نمایش هندسی یک بردار - $\overrightarrow{AB}$ را چنین نمایش میدهند:

A ⟶ B

یعنی درتیه بردار تیری میگذارند - این تیر سوی بردار را مینمایاند.

اندازه بردار - عبارتست از اندازه درازای آن (یا که درازا)

برای اینکه بردار کاملا معین باشد کافیست که یا سر و تیه آن بردار داده شود (درینصورت راستا و سو و اندازه آن هم معین است) و یا اینکه سر و راستا و سو و اندازه آن در دست باشد (درینصورت تیه بردار نیز معین است)

۳۴- اندازه جبری بردار - هرگاه روی خطی که بردار روی آن است (و یا روی یک خط همرو با راستای بردار) آسه ای بگیریم مانند $x'x$ بنابر آنکه سوی بردار مانند سوی این آسه باشد و یا وارونه آن اندازه جبری بردار مثبت یا منفی خواهد بود و مقدار مطلق آن برابرست با درازای بردار (اندازه مطلق بردار) [پس هرجا گفتگو از اندازه جبری بردار ی بمیان آید ضمنا آسه ای هم درکار است که راستای آن آسه یا روی بردار است و یا موازی آن]

x' A B D C x

(شکل ۳۱)

مثلا در شکل ۳۱ که درازای AB برابر ۳ سانتیمتر و درازای CD برابر ۲ سانتیمتر است اندازه جبری بردارهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ بترتیب ۳+ و ۲- میباشد و آن را چنین می نویسیم

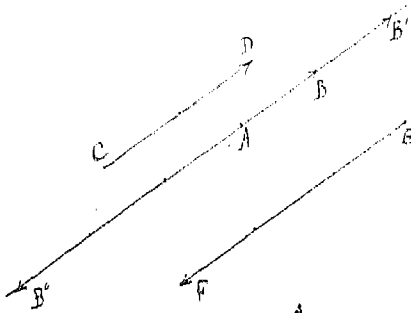
$\overline{AB} = +3$ (اندازه جبری بردار AB)

$\overline{CD} = -2$

روشن است که در همه حال $\overline{AB} = -\overline{BA}$ و یا

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BA} = 0} \quad (27)$$

۳۴- ضرب یک بردار در یک عدد جبری - اگر بردار $\vec{AB} = \vec{v}$ داده شده باشد (شکل ۳۲) غرض از $2\vec{v}$ و یا $2\vec{AB}$ برداریست که راستایش همان راستای AB درازایش دو برابر درازای $\vec{v}$ بوده سویش از A به B باشد:

$$2\vec{v} = \vec{AB'} = \vec{CD}$$

(شکل ۳۲)

و هرگاه بگوییم $-3\vec{v}$ و یا $-3\vec{AB}$ غرض برداری است در همان راستای AB که درازایش سه برابر درازای $\vec{AB}$ بوده سویش از B به A باشد.

$$-3\vec{v} = \vec{AB''} = \vec{EF}$$

بطور کلی غرض از $m\vec{v}$ برداریست در همان راستای $\vec{v}$ که درازیش برابر حاصل ضرب درازای $\vec{v}$ در قدر مطلق عدد جبری m بوده سویش با سوی $\vec{v}$ یکی است اگر m مثبت باشد و وارونه سوی $\vec{v}$ است هرگاه m منفی باشد .

۳۵ - بردار یکه یک آسه - هرگاه روی آسه $x'x$ برداری بگیریم مانند $\vec{i}$ که اندازه جبری آن $+1$ باشد آن را بردار یکه آسه $x'x$ مینامیم - روشن است که اگر $\vec{i}$ را داشته باشیم آسه هم کاملاً مشخص است (از حیث راستا و سو) بنابرین هرگاه اندازه جبری یک بردار روی یک آسه که بردار یکه آن $\vec{i}$ است x باشد و اگر سر آن بردار هم داده شده باشد میتوان آن بردار را $x\vec{i}$ نوشت (۳۴)

ورزش

۱ - دو نقطه A و B بدلخواه گرفته بردارهای $2\overrightarrow{AB}$ ، $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $-2\overrightarrow{AB}$ و $-\overrightarrow{AB}$ را نمایش دهید .

۲ - اگر $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ و $\vec{i'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ باشد اندازه جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ و چهار بردار دیگر از ورزش (۱) را روی دو آسه ای که بردار یکه آنها بترتیب $\vec{i}$ و $\vec{i'}$ باشد بدست آورید یعنی هر یک از این بردارها را بصورت حاصلضرب $\vec{i}$ یا $\vec{i'}$ در یک عدد جبری بنویسید .

۳۶- آبسیس یک نقطه در روی یک آسه - برای معین کردن جای هر نقطه مانند M در روی آسه $x'x$ روی این آسه نقطه ای مانند O می گیریم که آن را خاستگاه آن آسه مینامیم (شکل ۳۳) - حال اگر اندازه جبری بردار $\overline{OM}$ را

x' —— O —— M —— x

(شکل ۳۳)

بدانیم جای M را هم روی آسه میدانیم - این اندازه جبری را آبسیس نقطه M در روی اسه مینامند (نسبت بخاستگاه O) و آنرا به x مینمایند:

$$x = \overline{OM}$$

ورزش - روی آسه $x'x$ نقطه هائی را بدست آورید که آبسیس آنها بترتیب ۲ و ۱- و ۰ و ۲٫۵- باشد و همچنین بدست آورید نقطه های M و N و P را قسمی که $\overline{OM} = ۵$ و $\overline{ON} = -۳$ و $\overline{OP} = ۱$ باشد

۳۷- اندازه جبری بردار از روی آبسیس سرو ته آن - اگر روی آسه $x'ox$ بردار $\overrightarrow{AB}$ داده شود بقسمی که آبسیس A برابر a و آبسیس B برابر عدد b باشد یعنی $\overline{OA} = a$ و $\overline{OB} = b$ میدانیم (جبر سوم ۵۳) که میان سه اندازه جبری $\overline{OA}$ و $\overline{AB}$ و $\overline{OB}$ همیشه این

بستگی هست :

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$ (قضیهٔ شال)

و یا

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

یا

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}$$ (۲۸)

یعنی اندازهٔ جبری یک بردار (روی یک آسه) برابرست با تفاضل میان آبسیس تهٔ آن و آبسیس سرآن .

ورزش ـ اندازهٔ جبری بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{PM}$ را (که آبسیسهای سر و تهٔ آنها در ورزش پیش داده شده) بدست آورید و ثابت کنید که

$$\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = 0$$

و نیز

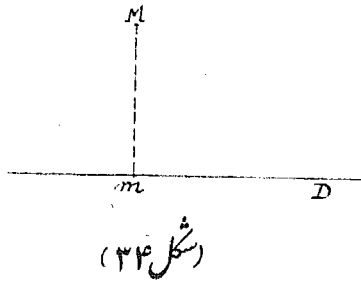
$$\overline{OP} + \overline{PN} + \overline{NM} + \overline{MO} = 0$$

نتیجهٔ این ورزش را عمومیت دهید .

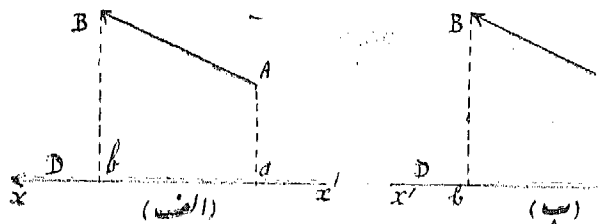
و نیز درستی اتحاد زیر را بررسی کنید :

$$\overline{OM} \cdot \overline{NP} + \overline{ON} \cdot \overline{PM} + \overline{OP} \cdot \overline{MN} = 0$$

۳۸ ـ تصویر راست گذر یک نقطه بر روی یک خط ـ هرگاه خط D و نقطهٔ M داده شده باشد تصویر راست گذر M روی خط D پایهٔ ستون نیست (عمود) که

فرود آید. در شکل ۳۴ نقطهٔ m تصویر راست گذر M است

ه مانند M روی خط
یر معینی است ولی
m از D میتواند
شماری باشد.

(شکل ۳۴)

دیر راست گذر یک بردار روی یکخط و روی یک آسه
ا خط D برداری است مانند $\overrightarrow{ab}$ که سر آن تصویر سر بردا
یر A و ته آن تصویر ته بردار AB یعنی تصویر B باشد (شکل ۳۵

(شکل ۳۵)

D آسه‌ای بگیریم مانند x'x در اینصورت اندازهٔ جبری $\overline{ab}$
AB روی آسهٔ x'x میخوانیم. پس در حقیقت تصویر یک بردار روی
ست از اندازهٔ جبری تصویر آن بردار روی خطی که بر آن آ

منطبق است (یا روی راستای آسه)

مثلاً در (شکل ۳۵ الف) تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی آسه $x'x$ عددی است مثبت

و در (شکل ۳۵ ب) « $\overrightarrow{AB}$ « « $x'x$ عددی است منفی

۴۰- آبسیس و اُردُنه در یک هامن. - برای معین کردن جای هر نقطه مانند

M در یک هامن معمولاً در آن هامن نقطه‌ای مانند o بدلخواه میگیرند بطوریکه جایش

معلوم باشد و از آن نقطه دو آسه $x'ox$ و $y'oy$ عمود بر یکدیگر میگذرانند بطوریکه

بتوان سوی مثبت ox را پس از یک گردش $+\frac{\pi}{2}$ روی سوی مثبت

oy آورد: $(ox, oy) = +\frac{\pi}{2}$

آسه $x'ox$ را آسه x ها یا آبسیس‌ها و آسه $y'oy$ را آسه y ها یا اُردُنه‌ها و o را

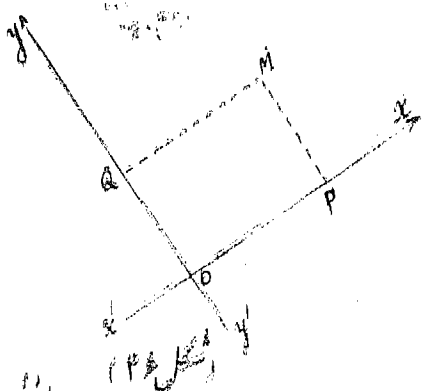
خاستگاه این دو آسه و یا خاستگاه هامن مینامند (ممکن است خاستگاه دو آسه یا یکی

از آنها در o نباشد) (شکل ۳۶)

(شکل ۳۶)

حال اگر تصویر راست گذر بُردار $\overline{OM}$ روی آسه x ها و آسه y ها

بترتیب $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ باشد $\overline{OP}$

(یعنی تصویر بُردار OM روی آسه

$x'ox$) را x یا آبسیس نقطه M و $\overline{OQ}$ (تصویر $\overline{OM}$ روی $y'oy$) را y یا اُردُنه

نقطهٔ M خوانند :

$$x = \overline{OP}$$

$$y = \overline{OQ}$$

و روشن است که برای معین کردن جای M کافی است x و y آنرا معین کنیم

(شمارهٔ ۱۸۸ از جبر سال سوم را ببینید)

۱۴۱ـ تبصره ـ اگر تعریفی را که برای سینوس و سینوس متمم یک کمان AM (و یا گوشهٔ AOM) در پیش نمودیم (شمارهٔ ۲۲) بیاد آوریم می‌بینیم که سینوس متمم و سینوس $\overset{\frown}{AM}$ همانا آبسیس و اُردونهٔ نقطهٔ M یعنی تهٔ کمان AM میباشند نسبت بدو آسهٔ $x'ox$ و $y'oy$ و یا عبارتند از تصویرهای بُردار OM روی همین دو آسه

بخصوص میتوان گفت که سینوس متمم گوشهٔ xOM برابر تصویر بُردار $\overline{OM}$ است روی آسهٔ ox

ولی گوشهٔ xOM را میتوان گوشهٔ میان دو آسه (یعنی گوشهٔ میان سوهای بِشِت دو آسه) دانست : آسهٔ $x'Ox$ و آسهٔ

(شکل ۳۷)

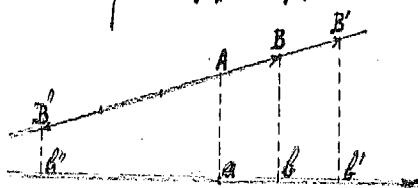
xoz که $\overrightarrow{OM}$ بردار یکه آنست (شکل ۳۷) بنابرین

سینوس متمم گوشه میان دو آسه برابر است با تصویر بردار یکه یکی از آن دو آسه روی آسه دیگر

$$\cos(oz, ox) = \cos(ox, oz) = \text{تصویر } \overrightarrow{OM} \text{ روی } ox$$

$$= \text{تصویر } \overrightarrow{OA} \text{ روی } oz$$

[این نکته در نظر گرفته شود که گرچه نشانه دو گوشه (oz, ox) و (ox, oz) یکی نیست ولی سینوس متمم این دو گوشه یکی است (دستورهای ۲۳)]

۴۲ - اندازه جبری تصویر یک بردار - از روی یک شکل روشن است که هرگاه برداری را در یک عدد جبری ضرب (و یا تقسیم) کنیم اندازه جبری تصویر آن بردار بر روی یک آسه نیز در آن عدد ضرب (و یا بر آن تقسیم) میشود

مثلاً اگر $\overrightarrow{AB'}$ دو برابر $\overrightarrow{AB}$ باشد $\overline{ab'}$ نیز دو برابر $\overline{ab}$ است (شکل ۳۸)

(شکل ۳۸)

و همچنین اگر $\overrightarrow{AB''}$ برابر $-3\overrightarrow{AB}$ باشد $\overline{ab''}$ نیز برابر $-3\overline{ab}$ خواهد بود

حال اگر فرض کنیم اندازه جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ (شماره ۳۴) روی آسه $x'x$ و بردار یکه این آسه $\overrightarrow{OI}$ باشد خواهیم داشت (شماره ۳۵):

$$\overrightarrow{AB} = m\,\overrightarrow{OI}$$

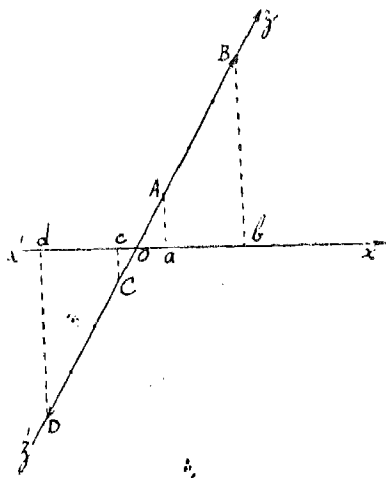
پس بنابر آنچه گفتیم تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی یک آسه مانند $x'ox$ عبارتست از m برابر تصویر $\overrightarrow{OI}$ روی $x'ox$ ولی بنابر شماره پیش تصویر $\overrightarrow{OI}$ روی $x'ox$ برابر است با سینوس متمم گوشه میان دو آسه zz' و $x'ox$ پس:

قضیه - تصویر یک بردار روی یک آسه برابر است با حاصل ضرب اندازه جبری بردار در سینوس متمم گوشه میان آسه ایکه بردار روی آنست و آسه تصویر مثلاً اگر گوشه میان آسه تصویر $x'ox$ و آسه zz' که بردار روی آنست ۶۰° باشد $[(ox, oz) = ۶۰°]$ و اگر دو بردار بدرازای ۳ سانتیمتر روی zz' بگیریم یکی $\overrightarrow{AB}$ بقسمیکه $\overline{AB} = +۳$ و دیگر $\overrightarrow{CD}$ بقسمی که $\overline{CD} = -۳$ باشد (شکل ۳۹) خواهیم داشت:

$$\overline{ab} = \overline{AB}\cos(ox, oz) = +۳\cos ۶۰°$$

$$= ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$\overline{cd} = \overline{CD}\cos(ox, oz) = -۳\cos ۶۰°$$

$$= -۳ \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

(شکل ۳۹)

اگر در همین شکل سوی مثبت آسهٔ zz' را از z بسوی z' بگیریم خواهیم داشت :

$$\overline{CD} = +۳ \;;\; \overline{AB} = -۳ \;;\; (ox, oz') = ۶۰° + ۱۸۰°$$

$$\cos(ox, oz') = -\cos ۶۰° = -\frac{۱}{۲}$$

پس $$\overline{ab} = \overline{AB}\cos(ox, oz') = -۳ \times \frac{-۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$\overline{cd} = \overline{CD}\cos(ox, oz') = +۳ \times \frac{-۱}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

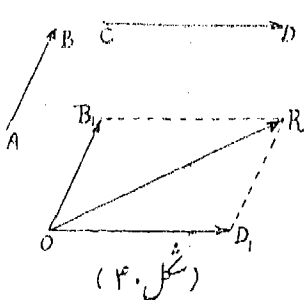
می بینیم (چنانکه پیش هم پیش بینی هم میشد) که اندازهٔ جبری تصویر یک بردار روی یک آسه بستگی بسوی آسه ایکه روی بردار میگیریم ندارد (زیرا اگر سوی zz' تغییر کند هم نشانهٔ اندازهٔ جبری بردار و هم نشانهٔ سینوس متمم گوشهٔ دو آسه تغییر میکند پس نشانهٔ حاصل ضرب آنها تغییر نخواهد کرد)

ورزش - در هامن دو آسهٔ $x'ox$ و $y'oy$ (که عمود بر یکدیگرند) نقطه های زیر را بیابید :

$$A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} ۲+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \\ ۱+\frac{۳}{۲} \end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix} ۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{۵}{۲}+\sqrt{۳} \end{vmatrix}$$

و تصویر راست گذر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را روی دو آسهٔ $x'ox$ و $y'oy$ معین کنید (هم مستقیماً هم از روی شمارهٔ ۳۷ و هم از روی قضیهٔ بالا)

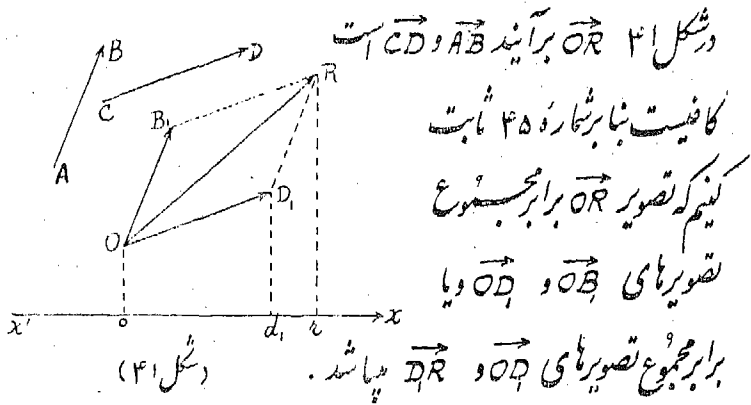
۴۳ - برآیند دو بردار - اگر از نقطه‌ای دلخواه مانند O دو بردار $\overrightarrow{OB}$ و

$\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ بکشیم $\overrightarrow{OD_1}$ را بترتیب همرو و هم سو و هم اندازه با دو بردار
(شکل ۴۰) واگر R تارک چهارم همرو بری (متوازی الاضلاعی) باشد که دو پهلوی
آن OB_1 و OD_1 باشد،
بنا بتعریف بردار $\overrightarrow{OR}$ برآیند
یا مجموع هندسی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$
(و یا $\overrightarrow{OB_1}$ و $\overrightarrow{OD_1}$) نامیده میشود.

(شکل ۴۰)

۴۴- بردارهای همسنگ - هر دو برداری که همرو و همسو و هم اندازه باشند
هم سنگ یکدیگر نامیده میشوند بنابرین در شکل ۴۰ $\overrightarrow{OB_1}$ همسنگ $\overrightarrow{AB}$ است
و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ $\overrightarrow{OD_1}$.

۴۵- تصویر دو بردار همسنگ - تصویرهای دو بردار همسنگ روی یک
آسه برابرند (دو عدد جبری برابر)
و این قضیه نتیجه ایست از قضیه شماره ۴۲:
زیرا اگر روی دو بردار همسنگ دو آسه هم سو بگیریم هم اندازه جبری این دو
بردار برابر میشود و هم سینوس متمم گوشه میان آسه تصویر و هر یک از این دو آسه
۴۶- قضیه - تصویر برآیند دو بردار روی یک آسه برابر است
با حاصل جمع جبری تصویرهای آن دو بردار روی همان آسه.

در شکل ۴۱ $\overrightarrow{OR}$ برآیند $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ است کافیست بنا بر شماره ۴۵ ثابت کنیم که تصویر $\overrightarrow{OR}$ برابر مجموع تصویرهای $\overrightarrow{OB_1}$ و $\overrightarrow{OD_1}$ و یا برابر مجموع تصویرهای $\overrightarrow{OD_1}$ و $\overrightarrow{D_1R}$ میباشد.

(شکل ۴۱)

ولی اگر تصویرهای سه نقطه O و D_1 و R بترتیب o و d_1 و r باشد تصویر بردارهای $\overrightarrow{OD_1}$ و $\overrightarrow{D_1R}$ و $\overrightarrow{OR}$ بترتیب $\overline{od_1}$ و $\overline{d_1r}$ و $\overline{or}$ خواهد بود و بنا بر قضیه شال (شماره ۳۷) خواهیم داشت:

$$\overline{or} = \overline{od_1} + \overline{d_1r}$$

و یا (تصویر $\overrightarrow{OR}$) روی $x'x$ = (تصویر $\overrightarrow{OD_1}$) روی $x'x$ + (تصویر $\overrightarrow{OB_1}$) روی $x'x$

ورزش

برآیند چند بردار $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ و ... $\vec{v_n}$ چنین بدست میآید که از نقطه دلخواهی مانند o بردار $\overrightarrow{OA_1}$ راهمسنگ با $\vec{v_1}$ و از A_1 بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ راهمسنگ با $\vec{v_2}$ ..... و از A_{n-1} بردار $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ راهمسنگ با $\vec{v_n}$ میکشیم: $\overrightarrow{OA_n}$ برآیند مطلوبست.

۱- قضیه شال را عمومیت دهید.

۲- قضیه ۴۶ را برای چند بردار عمومیت دهید.

۳- خط شکسته ایست منتظم ABCD دارای سه پهلو که درازای هر یک از پهلوهای آن a و گوشهٔ خارجی این خط شکسته یکی از تارکهای آن α میباشد: $(AB, BC) = \alpha$

و مرکز دایرهٔ محیطی این خط شکسته را O مینامیم:

الف - حساب کنید بحسب a و α

پرتو OA

گوشهٔ مرکزی $\widehat{AOD}$

درازای AD و گوشهٔ میان AB و AD را.

ب - بنا به تعریف برآیند بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ بردار $\overrightarrow{AD}$ است - اگر نتیجهٔ ورزش (۲) را در مورد این سه بردار و برآیند آنها بکار بریم و روی آسهٔ AB تصویر کنیم بچه اتحادی خواهیم رسید؟

۴- از روی نتیجهٔ ورزش (۲) برابریهای زیر را ثابت کنید (و عمومیت دهید).

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

(نیمه پیرامون یک پنج بر منتظم یا یک هفت بر منتظم را روی یکی از پهلوها تصویر کنید)

بخش چهارم

پردازشهای مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان (یا دو گوشه)

میخواهیم با داشتن پردازشهای مثلثاتی دو کمان a و b پردازشهای مثلثاتی کمان $(a + b)$ و کمان $(a - b)$ را حساب کنیم.

۴۲ - الف - $\cos(a \pm b)$ فرض کنیم $\overset{\frown}{AM}$ برابر a و $\overset{\frown}{MM'}$ برابر b باشد (شکل ۴۲) پس $\overset{\frown}{AMM'}$ برابر $a + b$ خواهد بود (بهتر بگوئیم یکی از اندازه‌های $\overset{\frown}{AMM'}$ برابر $a + b$ است) و مقصود بدست آوردن سینوس متمم کمان $\overset{\frown}{AMM'}$ است از روی پردازشهای مثلثاتی کمانهای $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{MM'}$.

(شکل ۴۲)

آسه سینوس متمم و آسه سینوس کمانهای AM و AMM' (که سرهردو در A است) عبارتند از $x'ox$ منطبق بر OA و $y'oy$ یا OB.

همچنین تصویر $\overrightarrow{OQ}$ روی $x'x$ برابر است با حاصل ضرب اندازه جبری $\overrightarrow{OQ}$ روی $t't$ (یعنی $\sin b$) در سینوس متمم گوشه میان $t't$ و $x'x$ ولی

$$\cos(Ox, Ot) = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$$

پس

$$(\overrightarrow{OQ}\text{ تصویر})_{x'x} = \sin b \times (-\sin a)$$

بنابرین

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b} \quad (29)$$

ب - "$\cos(a-b)$ و $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$":

میتوان $\cos(a-b)$ و $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$ را نیز مانند $\cos(a+b)$ بدست آورد. ولی آسانتر این است که آنها را از روی دستور (۲۹) بدست آوریم:

چون دستور (۲۹) درست است هرچه باشد a و b (یعنی اتحاد است) پس اگر بجای کمان b کمان $(-b)$ را بگذاریم خواهیم داشت:

$$\cos\left[a + (-b)\right] = \cos a . \cos(-b) - \sin a . \sin(-b)$$

و یا چون (دستور ۲۴) $\cos(-b) = \cos b$ و $\sin(-b) = -\sin b$

پس

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a . \sin b} \quad (31)$$

برای بدست آوردن $\sin(a+b)$ میتوانیم بنویسیم (دستورهای ۸ شماره ۲۹) :

$$\sin(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

پس کافیست در اتحاد ۳۰ بجای a بگذاریم $\frac{\pi}{2} - a$:

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b$$

و یا چون (دستورهای ۲۳) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

پس

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \quad (۳۱)$$

و اگر در این اتحاد بجای b بگذاریم $-b$ خواهیم داشت :

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a.\sin b \quad (۳۲)$$

۷ - $tg(a+b)$ و $tg(a-b)$.

اگر دو طرف اتحاد (۳۱) را بر دو طرف اتحاد (۲۹) تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = tg(a+b) = \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b - \sin b.\sin b}$$

و اگر برخه نام و برخه شمار طرف دوم را بر $\cos a . \cos b$ تقسیم کنیم چنین خواهد شد :

$$tg(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}{1 - \frac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

و یا

$$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b} \qquad (۳۳)$$

$tg(a-b)$ را هم میتوان مانند $tg(a+b)$ از تقسیم کردن دو طرف (۳۲) بر دو طرف (۳۰) بدست آورد ولی آسانتر آنست که در اتحاد (۳۳) b را به $-b$ تبدیل نمائیم:

$$tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b} \qquad (۳۴)$$

تبصره - عبارت $cot(a+b)$ و $cot(a-b)$ بترتیب وارون عبارتهای $tg(a+b)$ و $tg(a-b)$ میباشند.

۴۸ - پردازشهای مثلثاتی کمان $۲a$ از روی پردازشهای مثلثاتی a اگر در اتحادهای (۲۹) و (۳۱) و (۳۳) بجای کمان b کمان a بگذاریم (یعنی b را برابر a بگیریم) خواهیم داشت:

$$\cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a \qquad (۳۵)$$

$$\sin ۲a = ۲ \sin a . \cos a \qquad (۳۶)$$

$$tg\, ۲a = \frac{۲\, tg\, a}{1 - tg^۲ a} \qquad (۳۷)$$

$\cos 2a$ را میتوان تنها بحسب $\sin a$ و $\cos a$ نیز نوشت - برای این کار در دستور (۳۵) یکبار بجای $\cos^2 a$ میگذاریم $1 - \sin^2 a$ (بنا بدستور ۱۱) و بار دیگر بجای $\sin^2 a$ میگذاریم $1 - \cos^2 a$ تا بترتیب دو دستور زیر بدست آید:

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \qquad (۳۸)$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad (۳۹)$$

تبصرهٔ ۱ - چنانکه می بینیم $\cos 2a$ برابر عبارتیست گویا چه بحسب $\sin a$ تنها و چه بحسب $\cos a$ تنها - و همچنین $\tg 2a$ گویاست بحسب $\tg a$ تنها ولی $\sin 2a$ بحسب $\sin a$ تنها و یا $\cos a$ تنها گویا نیست زیرا اگر مثلاً بخواهیم تنها آن را بحسب $\sin a$ بنویسیم بایستی بجای $\cos a$ عبارت گنگ $\pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$ را بگذاریم:

$$\sin 2a = \pm 2\sin a\sqrt{1 - 2\sin^2 a}$$

تبصرهٔ ۲ - هرگاه در اتحادهای از (۳۵) تا (۳۹) بجای کمان a $\frac{a}{2}$ را بگذاریم پردازشهای مثلثاتی کمان a را بحسب پردازشهای مثلثاتی کمان نیمهٔ آن خواهیم داشت:

$$(۴۰)\quad \begin{cases} \cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 \\ \sin a = 2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2} \\ tg\,a = \dfrac{2\,tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}} \end{cases}$$

درحقیقت میان دستورهای (۴۰) و دستورهای بالا تفاوتی هم نیست چه آنها هم پردازشهای مثلثاتی کمان $2a$ را بحسب پردازشهای مثلثاتی کمان نیمهٔ $2a$ یعنی a میدهند.

تبصرهٔ ۲- بعکس میتوان $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ را بحسب $\cos 2a$ [از روی دو اتحاد ۳۸ و ۳۹] بدست آورد:

$$(۴۱)\quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$(۴۲)\quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

۴۹- پردازشهای مثلثاتی a بحسب $tg\frac{a}{2}$. چنانکه دیدیم عبارت $tg\,a$ بحسب $tg\frac{a}{2}$ گویا است (بستگی های ۴۰):

$$(۴۳)\quad tg\,a = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

میتوان $\sin a$ و $\cos a$ را نیز بحسب $tg\frac{a}{2}$ بصورت عبارتهائی گویا درآورد:

برای این کار کافی است چون $1 = \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2}$

دوّم برابریهای نخست و چهارم از بستگی های (۴۰) را بر $\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}$ تقسیم کنیم:

$$\cos a = \frac{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}, \quad \sin a = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}$$

سپس در طرفهای دوّم برخهٔ نام و برخهٔ شمار را بر $\cos^2\frac{a}{2}$ تقسیم میکنیم

$$\cos a = \frac{\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}-\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin a = \frac{\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}} = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$$

ورزش - عبارت $\cos a$ را بسبب $tg\frac{a}{2}$ اندوختن از آنکه

$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}-1$ و $\cos a = 1-2\sin^2\frac{a}{2}$ بدست آوریدِ از ضرب کردن

طرفهای دوّم در $\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2}(1+tg^2\frac{a}{2})}$ که بنابر اتحاد ۱ برابر با یک است و در نظر گرفتن همین اتحاد)

خلاصه

$$\cos a = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (۴۴)$$

$$\sin a = \frac{2\,tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (۴۵)$$

ورزش است که از تقسیم کردن دو طرف (۴۵) بر دو طرف (۴۴) اتحاد

(۴۳) بدست میآید

ورزش

طرف دوم برابریهای زیر را بنویسید :

(۱) $\cos(a+60^\circ)=?$ (۲) $\sin(a+45^\circ)=?$

(۳) $\sin(45^\circ-30^\circ)=?$ (۴) $tg(180^\circ-60^\circ)=?$

(۵) $\cos(45^\circ+60^\circ)=?$ (۶) $tg(60^\circ-x)=?$

(۷) $\sin 3x . \cos x + \cos 3x . \sin x = ?$

(۸) $\sin 2a . \cos a - \cos 2a . \sin a = ?$

(۹) $\sin 5a . \sin a + \cos 5a \cos a = ?$

(۱۰) $\cos 4a . \cos a - \sin 4a . \sin a = ?$

(۱۱) $\dfrac{tg 3x - tg x}{1 + tg 3x . tg x} = ?$

(۱۲) $\cos(45^\circ-a).\cos(45^\circ+a) - \sin(45^\circ-a).\sin(45^\circ+a) = ?$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید :

(۱۳) $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

(۱۴) $\sin a \cos(90^\circ-a) - \cos a . \sin(90^\circ-a) = -\cos 2a$

(۱۵) $\cos(30^\circ-45^\circ) - \cos(30^\circ+45^\circ) = \sin 45^\circ$

۱۶- با دانستن $\sin a = \frac{4}{5}$ و $\cos b = \frac{3}{4}$ حساب کنید $\sin(a+b)$

a و b دو گوشه‌ی تند هستند که $tg\, a = \frac{5}{4}$ و $\cot b = \frac{1}{3}$ حساب کنید !

(۱۷) $\sin(a+b)$ (۱۸) $\cos(a+b)$

(۱۹) $\sin(a-b)$ (۲۰) $\cos(a-b)$

(۲۱) $\operatorname{tg}(a+b)$ (۲۲) $\operatorname{tg}(a-b)$

ونیز اگر a و b دوگوشه تند باشد بطوریکه $\sin a = \frac{1}{2}$ و $\cos b = \frac{1}{3}$

پروازشهای (۱۷) تا (۲۲) راحساب کنید.

۲۳- خطهای مثلثاتی 15° و 75° راحساب کرده درستی برابرهای زیر را بررسی نمائید ($15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$):

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3} \qquad \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ \quad \text{و} \quad \dots$$

۲۴- خطهای مثلثاتی 105° راحساب کنید.

۲۵- ازروی خطهای مثلثاتی 30° و 60° حساب کنید $\cos 90^\circ$ و $\sin 90^\circ$ را.

۲۶- a کمانیست که نهایت آن در بخش سوم از دایره مثلثاتی است و b کمانیست که نهایت آن در بخش دوم است داریم $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$ و $\sin b = \frac{5}{13}$ حساب کنید $\sin(a \pm b)$ و $\cos(a \pm b)$ و $\operatorname{tg}(a \pm b)$ را

۲۷- از روی پردازشهای مثلثاتی x و y و z حساب کنید پردازشهای مثلثاتی $x+y+z$ را.

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

$$\frac{tg(x+y)-tg\,x}{1+tg(x+y)\cdot tg\,x}=tg\,y \qquad (۲۸)$$

$$\cos x\cos(x-y)+\sin x\sin(x-y)=\cos y \qquad (۲۹)$$

$$\cos(x-y)+\sin(x+y)=(\sin x+\cos x)(\sin y+\cos y) \qquad (۳۰)$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{tg\,x+tg\,y}{tg\,x-tg\,y} \qquad (۳۱)$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}=\frac{\cot x\cdot\cot y-1}{\cot x\cdot\cot y+1} \qquad (۳۲)$$

$$\sin ۴x.\cos x-\cos ۴x.\sin x=\sin ۳x \qquad (۳۳)$$

$$\sin ۲x.\cos x+\cos ۲x.\sin x=\sin ۳x \qquad (۳۴)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(۹۰^\circ-x)=\cos x\\ \cos(۱۸۰^\circ-x)=-\cos x\\ tg(۱۸۰^\circ-x)=-tg\,x\end{array}\right\} \qquad (۳۵)$$

$$\frac{\sin ۳x}{\sin x}-\frac{\cos ۳x}{\cos x}=۲ \qquad (۳۶)$$

$$tg(x\pm ۴۵^\circ)+\cot g(x\mp ۴۵^\circ)=0 \qquad (۳۷)$$

$$\sin(۶۰^\circ+x).\cos(۳۰^\circ+x)-\cos(۶۰^\circ+x).\sin(۳۰^\circ+x)=\frac{1}{۲} \qquad (۳۸)$$

(۳۹) $$\frac{\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)}{\cos^2 a\cdot\cos^2 b}=tg^2 a-tg^2 b$$

(۴۰) x گوشه‌ایست میان 90° و 180° $(90^\circ < x < 180^\circ)$ بقسمی که $\sin x=\frac{4}{5}$ حساب کنید پرداشتهای زیر را:

$$\sin 2x \quad , \quad \cos 2x \quad ; \quad tg\,2x$$

$$\sin\frac{x}{2} \quad , \quad \cos\frac{x}{2} \quad ; \quad tg\,\frac{x}{2}$$

اتحادهای زیر را ثابت کنید:

(۴۱) $$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$$

(۴۲) $$\cos 2x=\frac{2\,tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+tg^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

(۴۳) $$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$$

(۴۴) $$tg\,x=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

(۴۵) $$tg\,\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

(۴۶) $$\cos 2x=\frac{\cot x-tg\,x}{\cot x+tg\,x}$$

(۴۷) $$\cos 2x=\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

(۴۸) $$tg(45^\circ+x)-tg(45^\circ-x)=2\,tg\,2x$$

(۴۹) $$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

(۵۰) $$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$tg\,۳a = \frac{۳\,tg\,a - tg^۳ a}{۱ - ۳\,tg^۲ a} \qquad (۵۱)$$

(۵۲) خط های مثلثاتی ۲۲٫۵ را بکمک دستورهای (۴۱) و (۴۲) بدست آورید و برابریهای زیر را ثابت کنید .

$$\cos ۲۲^\circ\ ۳۰' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}} \qquad \sin ۲۲^\circ\ ۳۰' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$\cot ۲۲^\circ\ ۳۰' = \sqrt{۲} + ۱ \quad \circ \quad tg\,۲۲^\circ\ ۳۰' = \sqrt{۲} - ۱$$

(۵۳) برابریهای ورزش (۵۲) را از روی ورزش (۴۴) واتحاد (۲۱) نیز بدست آورید .

(۵۴) ثابت کنید که سینوس یک کمان کوچکتر از ۹۰ برابر است با نیمه زه کمان دو برابر آن از دایره مثلثاتی .

از نیرو نیز درستی برابریهای ورزش های (۲۳) و (۵۲) را بررسی نمایید.

(۵۵) ثابت کنید که نسبت پهنه یک پنج پهلوی منتظم به پهنه یک ده پهلوی منتظم (رو محاط در یک دایره) برابر $\cos ۳۶^\circ$ است

(۵۶) پیدا کنید خطهای مثلثاتی ۳۰ را از روی خط های مثلثاتی ۶۰

۳۰	«	«	۶۰	«	«
۳۰	«	«	۱۵	«	«
۱۵	«	«	۷٫۵	«	«

جدول

پرداززش ہای مثلثاتی

کمانهای از ۰ تا ۹۰°

و یا

از ۰ رادیان تا ۱٫۵۷۰۸ رادیان

رادیان	زینه		سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۰۰۰۰	۰′	۰°	۰٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰	—	۱٫۰۰۰۰	۰′	۹۰° ۱٫۵۷۰۸
۰٫۰۰۲۹	۱۰		۰٫۰۰۲۹	۰٫۰۰۲۹	۳۴۳٫۷۷	۱٫۰۰۰۰	۵۰	۱٫۵۶۷۹
۰٫۰۰۵۸	۲۰		۰٫۰۰۵۸	۰٫۰۰۵۸	۱۷۱٫۸۹	۱٫۰۰۰۰	۴۰	۱٫۵۶۵۰
۰٫۰۰۸۷	۳۰		۰٫۰۰۸۷	۰٫۰۰۸۷	۱۱۴٫۵۹	۱٫۰۰۰۰	۳۰	۱٫۵۶۲۱
۰٫۰۱۱۶	۴۰		۰٫۰۱۱۶	۰٫۰۱۱۶	۸۵٫۹۴۰	۰٫۹۹۹۹	۲۰	۱٫۵۵۹۲
۰٫۰۱۴۵	۵۰		۰٫۰۱۴۵	۰٫۰۱۴۵	۶۸٫۷۵۰	۰٫۹۹۹۹	۱۰	۱٫۵۵۶۳
۰٫۰۱۷۵	۰′	۱°	۰٫۰۱۷۵	۰٫۰۱۷۵	۵۷٫۲۹۰	۰٫۹۹۹۸	۰′	۸۹° ۱٫۵۵۳۳
۰٫۰۲۰۴	۱۰		۰٫۰۲۰۴	۰٫۰۲۰۴	۴۹٫۱۰۴	۰٫۹۹۹۸	۵۰	۱٫۵۵۰۴
۰٫۰۲۳۳	۲۰		۰٫۰۲۳۳	۰٫۰۲۳۳	۴۲٫۹۶۴	۰٫۹۹۹۷	۴۰	۱٫۵۴۷۵
۰٫۰۲۶۲	۳۰		۰٫۰۲۶۲	۰٫۰۲۶۲	۳۸٫۱۸۸	۰٫۹۹۹۷	۳۰	۱٫۵۴۴۶
۰٫۰۲۹۱	۴۰		۰٫۰۲۹۱	۰٫۰۲۹۱	۳۴٫۳۶۸	۰٫۹۹۹۶	۲۰	۱٫۵۴۱۷
۰٫۰۳۲۰	۵۰		۰٫۰۳۲۰	۰٫۰۳۲۰	۳۱٫۲۴۲	۰٫۹۹۹۵	۱۰	۱٫۵۳۸۸
۰٫۰۳۴۹	۰′	۲°	۰٫۰۳۴۹	۰٫۰۳۴۹	۲۸٫۶۳۶	۰٫۹۹۹۴	۰′	۸۸° ۱٫۵۳۵۹
۰٫۰۳۷۸	۱۰		۰٫۰۳۷۸	۰٫۰۳۷۸	۲۶٫۴۳۲	۰٫۹۹۹۳	۵۰	۱٫۵۳۳۰
۰٫۰۴۰۷	۲۰		۰٫۰۴۰۷	۰٫۰۴۰۷	۲۴٫۵۴۲	۰٫۹۹۹۲	۴۰	۱٫۵۳۰۱
۰٫۰۴۳۶	۳۰		۰٫۰۴۳۶	۰٫۰۴۳۷	۲۲٫۹۰۴	۰٫۹۹۹۰	۳۰	۱٫۵۲۷۲
۰٫۰۴۶۵	۴۰		۰٫۰۴۶۵	۰٫۰۴۶۶	۲۱٫۴۷۰	۰٫۹۹۸۹	۲۰	۱٫۵۲۴۳
۰٫۰۴۹۵	۵۰		۰٫۰۴۹۴	۰٫۰۴۹۵	۲۰٫۲۰۶	۰٫۹۹۸۸	۱۰	۱٫۵۲۱۳
۰٫۰۵۲۴	۰′	۳°	۰٫۰۵۲۳	۰٫۰۵۲۴	۱۹٫۰۸۱	۰٫۹۹۸۶	۰′	۸۷° ۱٫۵۱۸۴
۰٫۰۵۵۳	۱۰		۰٫۰۵۵۲	۰٫۰۵۵۳	۱۸٫۰۷۵	۰٫۹۹۸۵	۵۰	۱٫۵۱۵۵
۰٫۰۵۸۲	۲۰		۰٫۰۵۸۱	۰٫۰۵۸۲	۱۷٫۱۶۹	۰٫۹۹۸۳	۴۰	۱٫۵۱۲۶
۰٫۰۶۱۱	۳۰		۰٫۰۶۱۰	۰٫۰۶۱۲	۱۶٫۳۵۰	۰٫۹۹۸۱	۳۰	۱٫۵۰۹۷
۰٫۰۶۴۰	۴۰		۰٫۰۶۴۰	۰٫۰۶۴۱	۱۵٫۶۰۵	۰٫۹۹۸۰	۲۰	۱٫۵۰۶۸
۰٫۰۶۶۹	۵۰		۰٫۰۶۶۹	۰٫۰۶۷۰	۱۴٫۹۲۴	۰٫۹۹۷۸	۱۰	۱٫۵۰۳۹
۰٫۰۶۹۸	۰′	۴°	۰٫۰۶۹۸	۰٫۰۶۹۹	۱۴٫۳۰۱	۰٫۹۹۷۶	۰′	۸۶° ۱٫۵۰۱۰
۰٫۰۷۲۷	۱۰		۰٫۰۷۲۷	۰٫۰۷۲۹	۱۳٫۷۲۷	۰٫۹۹۷۴	۵۰	۱٫۴۹۸۱
۰٫۰۷۵۶	۲۰		۰٫۰۷۵۶	۰٫۰۷۵۸	۱۳٫۱۹۷	۰٫۹۹۷۱	۴۰	۱٫۴۹۵۲
۰٫۰۷۸۵	۳۰		۰٫۰۷۸۵	۰٫۰۷۸۷	۱۲٫۷۰۶	۰٫۹۹۶۹	۳۰	۱٫۴۹۲۳
۰٫۰۸۱۴	۴۰		۰٫۰۸۱۴	۰٫۰۸۱۶	۱۲٫۲۵۱	۰٫۹۹۶۷	۲۰	۱٫۴۸۹۴
۰٫۰۸۴۴	۵۰		۰٫۰۸۴۳	۰٫۰۸۴۶	۱۱٫۸۲۶	۰٫۹۹۶۴	۱۰	۱٫۴۸۶۴
۰٫۰۸۷۳	۰′	۵°	۰٫۰۸۷۲	۰٫۰۸۷۵	۱۱٫۴۳۰	۰٫۹۹۶۲	۰′	۸۵° ۱٫۴۸۳۵
			سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	رادیان

رادیان	درجه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰،۰۸۷۳	۵° ۰'	۰،۰۸۷۲	۰،۰۸۷۵	۱۱،۴۳۰	۰،۹۹۶۲	۸۵° ۰'	۱،۴۸۳۵
۰،۰۹۰۲	۱۰	۰،۰۹۰۱	۰،۰۹۰۴	۱۱،۰۵۹	۰،۹۹۵۹	۵۰	۱،۴۸۰۶
۰،۰۹۳۱	۲۰	۰،۰۹۲۹	۰،۰۹۳۴	۱۰،۷۱۲	۰،۹۹۵۷	۴۰	۱،۴۷۷۷
۰،۰۹۶۰	۳۰	۰،۰۹۵۸	۰،۰۹۶۳	۱۰،۳۸۵	۰،۹۹۵۴	۳۰	۱،۴۷۴۸
۰،۰۹۸۹	۴۰	۰،۰۹۸۷	۰،۰۹۹۲	۱۰،۰۷۸	۰،۹۹۵۱	۲۰	۱،۴۷۱۹
۰،۱۰۱۸	۵۰	۰،۱۰۱۶	۰،۱۰۲۲	۹،۷۸۸۲	۰،۹۹۴۸	۱۰	۱،۴۶۹۰
۰،۱۰۴۷	۶° ۰'	۰،۱۰۴۵	۰،۱۰۵۱	۹،۵۱۴۴	۰،۹۹۴۵	۸۴° ۰'	۱،۴۶۶۱
۰،۱۰۷۶	۱۰	۰،۱۰۷۴	۰،۱۰۸۰	۹،۲۵۵۳	۰،۹۹۴۲	۵۰	۱،۴۶۳۲
۰،۱۱۰۵	۲۰	۰،۱۱۰۳	۰،۱۱۱۰	۹،۰۰۹۸	۰،۹۹۳۹	۴۰	۱،۴۶۰۳
۰،۱۱۳۴	۳۰	۰،۱۱۳۲	۰،۱۱۳۹	۸،۷۷۶۹	۰،۹۹۳۶	۳۰	۱،۴۵۷۳
۰،۱۱۶۴	۴۰	۰،۱۱۶۱	۰،۱۱۶۹	۸،۵۵۵۵	۰،۹۹۳۲	۲۰	۱،۴۵۴۴
۰،۱۱۹۳	۵۰	۰،۱۱۹۰	۰،۱۱۹۸	۸،۳۴۵۰	۰،۹۹۲۹	۱۰	۱،۴۵۱۵
۰،۱۲۲۲	۷° ۰'	۰،۱۲۱۹	۰،۱۲۲۸	۸،۱۴۴۳	۰،۹۹۲۵	۸۳° ۰'	۱،۴۴۸۶
۰،۱۲۵۱	۱۰	۰،۱۲۴۸	۰،۱۲۵۷	۷،۹۵۳۰	۰،۹۹۲۲	۵۰	۱،۴۴۵۷
۰،۱۲۸۰	۲۰	۰،۱۲۷۶	۰،۱۲۸۷	۷،۷۷۰۴	۰،۹۹۱۸	۴۰	۱،۴۴۲۸
۰،۱۳۰۹	۳۰	۰،۱۳۰۵	۰،۱۳۱۷	۷،۵۹۵۸	۰،۹۹۱۴	۳۰	۱،۴۳۹۹
۰،۱۳۳۸	۴۰	۰،۱۳۳۴	۰،۱۳۴۶	۷،۴۲۸۷	۰،۹۹۱۱	۲۰	۱،۴۳۷۰
۰،۱۳۶۷	۵۰	۰،۱۳۶۳	۰،۱۳۷۶	۷،۲۶۸۷	۰،۹۹۰۷	۱۰	۱،۴۳۴۱
۰،۱۳۹۶	۸° ۰'	۰،۱۳۹۲	۰،۱۴۰۵	۷،۱۱۵۴	۰،۹۹۰۳	۸۲° ۰'	۱،۴۳۱۲
۰،۱۴۲۵	۱۰	۰،۱۴۲۱	۰،۱۴۳۵	۶،۹۶۸۲	۰،۹۸۹۹	۵۰	۱،۴۲۸۳
۰،۱۴۵۴	۲۰	۰،۱۴۴۹	۰،۱۴۶۵	۶،۸۲۶۹	۰،۹۸۹۴	۴۰	۱،۴۲۵۴
۰،۱۴۸۴	۳۰	۰،۱۴۷۸	۰،۱۴۹۵	۶،۶۹۱۲	۰،۹۸۹۰	۳۰	۱،۴۲۲۴
۰،۱۵۱۳	۴۰	۰،۱۵۰۷	۰،۱۵۲۴	۶،۵۶۰۶	۰،۹۸۸۶	۲۰	۱،۴۱۹۵
۰،۱۵۴۲	۵۰	۰،۱۵۳۶	۰،۱۵۵۴	۶،۴۳۴۸	۰،۹۸۸۱	۱۰	۱،۴۱۶۶
۰،۱۵۷۱	۹° ۰'	۰،۱۵۶۴	۰،۱۵۸۴	۶،۳۱۳۸	۰،۹۸۷۷	۸۱° ۰'	۱،۴۱۳۷
۰،۱۶۰۰	۱۰	۰،۱۵۹۳	۰،۱۶۱۴	۶،۱۹۷۰	۰،۹۸۷۲	۵۰	۱،۴۱۰۸
۰،۱۶۲۹	۲۰	۰،۱۶۲۲	۰،۱۶۴۴	۶،۰۸۴۴	۰،۹۸۶۸	۴۰	۱،۴۰۷۹
۰،۱۶۵۸	۳۰	۰،۱۶۵۰	۰،۱۶۷۳	۵،۹۷۵۸	۰،۹۸۶۳	۳۰	۱،۴۰۵۰
۰،۱۶۸۷	۴۰	۰،۱۶۷۹	۰،۱۷۰۳	۵،۸۷۰۸	۰،۹۸۵۸	۲۰	۱،۴۰۲۱
۰،۱۷۱۶	۵۰	۰،۱۷۰۸	۰،۱۷۳۳	۵،۷۶۹۴	۰،۹۸۵۳	۱۰	۱،۳۹۹۲
۰،۱۷۴۵	۱۰° ۰'	۰،۱۷۳۶	۰،۱۷۶۳	۵،۶۷۱۳	۰،۹۸۴۸	۸۰° ۰'	۱،۳۹۶۳
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	درجه	رادیان

راویان	زینه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۱۷۴۵	۱۰° ۰′	۰٫۱۷۳۶	۰٫۱۷۶۳	۵٫۶۷۱۳	۰٫۹۸۴۸	۸۰° ۰′	۱٫۳۹۶۳
۰٫۱۷۷۴	۱۰	۰٫۱۷۶۵	۰٫۱۷۹۳	۵٫۵۷۶۴	۰٫۹۸۴۳	۵۰	۱٫۳۹۳۴
۰٫۱۸۰۴	۲۰	۰٫۱۷۹۴	۰٫۱۸۲۳	۵٫۴۸۴۵	۰٫۹۸۳۸	۴۰	۱٫۳۹۰۴
۰٫۱۸۳۳	۳۰	۰٫۱۸۲۲	۰٫۱۸۵۳	۵٫۳۹۵۵	۰٫۹۸۳۳	۳۰	۱٫۳۸۷۵
۰٫۱۸۶۲	۴۰	۰٫۱۸۵۱	۰٫۱۸۸۳	۵٫۳۰۹۳	۰٫۹۸۲۷	۲۰	۱٫۳۸۴۶
۰٫۱۸۹۱	۵۰	۰٫۱۸۸۰	۰٫۱۹۱۴	۵٫۲۲۵۷	۰٫۹۸۲۲	۱۰	۱٫۳۸۱۷
۰٫۱۹۲۰	۱۱° ۰′	۰٫۱۹۰۸	۰٫۱۹۴۴	۵٫۱۴۴۶	۰٫۹۸۱۶	۷۹° ۰′	۱٫۳۷۸۸
۰٫۱۹۴۹	۱۰	۰٫۱۹۳۷	۰٫۱۹۷۴	۵٫۰۶۵۸	۰٫۹۸۱۱	۵۰	۱٫۳۷۵۹
۰٫۱۹۷۸	۲۰	۰٫۱۹۶۵	۰٫۲۰۰۴	۴٫۹۸۹۴	۰٫۹۸۰۵	۴۰	۱٫۳۷۳۰
۰٫۲۰۰۷	۳۰	۰٫۱۹۹۴	۰٫۲۰۳۵	۴٫۹۱۵۲	۰٫۹۷۹۹	۳۰	۱٫۳۷۰۱
۰٫۲۰۳۶	۴۰	۰٫۲۰۲۲	۰٫۲۰۶۵	۴٫۸۴۳۰	۰٫۹۷۹۳	۲۰	۱٫۳۶۷۲
۰٫۲۰۶۵	۵۰	۰٫۲۰۵۱	۰٫۲۰۹۵	۴٫۷۷۲۹	۰٫۹۷۸۷	۱۰	۱٫۳۶۴۳
۰٫۲۰۹۴	۱۲° ۰′	۰٫۲۰۷۹	۰٫۲۱۲۶	۴٫۷۰۴۶	۰٫۹۷۸۱	۷۸° ۰′	۱٫۳۶۱۴
۰٫۲۱۲۳	۱۰	۰٫۲۱۰۸	۰٫۲۱۵۶	۴٫۶۳۸۲	۰٫۹۷۷۵	۵۰	۱٫۳۵۸۴
۰٫۲۱۵۳	۲۰	۰٫۲۱۳۶	۰٫۲۱۸۶	۴٫۵۷۳۶	۰٫۹۷۶۹	۴۰	۱٫۳۵۵۵
۰٫۲۱۸۲	۳۰	۰٫۲۱۶۴	۰٫۲۲۱۷	۴٫۵۱۰۷	۰٫۹۷۶۳	۳۰	۱٫۳۵۲۶
۰٫۲۲۱۱	۴۰	۰٫۲۱۹۳	۰٫۲۲۴۷	۴٫۴۴۹۴	۰٫۹۷۵۷	۲۰	۱٫۳۴۹۷
۰٫۲۲۴۰	۵۰	۰٫۲۲۲۱	۰٫۲۲۷۸	۴٫۳۸۹۷	۰٫۹۷۵۰	۱۰	۱٫۳۴۶۸
۰٫۲۲۶۹	۱۳° ۰′	۰٫۲۲۵۰	۰٫۲۳۰۹	۴٫۳۳۱۵	۰٫۹۷۴۴	۷۷° ۰′	۱٫۳۴۳۹
۰٫۲۲۹۸	۱۰	۰٫۲۲۷۸	۰٫۲۳۳۹	۴٫۲۷۴۷	۰٫۹۷۳۷	۵۰	۱٫۳۴۱۰
۰٫۲۳۲۷	۲۰	۰٫۲۳۰۶	۰٫۲۳۷۰	۴٫۲۱۹۳	۰٫۹۷۳۰	۴۰	۱٫۳۳۸۱
۰٫۲۳۵۶	۳۰	۰٫۲۳۳۴	۰٫۲۴۰۱	۴٫۱۶۵۳	۰٫۹۷۲۴	۳۰	۱٫۳۳۵۲
۰٫۲۳۸۵	۴۰	۰٫۲۳۶۳	۰٫۲۴۳۲	۴٫۱۱۲۶	۰٫۹۷۱۷	۲۰	۱٫۳۳۲۳
۰٫۲۴۱۴	۵۰	۰٫۲۳۹۱	۰٫۲۴۶۲	۴٫۰۶۱۱	۰٫۹۷۱۰	۱۰	۱٫۳۲۹۴
۰٫۲۴۴۳	۱۴° ۰′	۰٫۲۴۱۹	۰٫۲۴۹۳	۴٫۰۱۰۸	۰٫۹۷۰۳	۷۶° ۰′	۱٫۳۲۶۵
۰٫۲۴۷۳	۱۰	۰٫۲۴۴۷	۰٫۲۵۲۴	۳٫۹۶۱۷	۰٫۹۶۹۶	۵۰	۱٫۳۲۳۵
۰٫۲۵۰۲	۲۰	۰٫۲۴۷۶	۰٫۲۵۵۵	۳٫۹۱۳۶	۰٫۹۶۸۹	۴۰	۱٫۳۲۰۶
۰٫۲۵۳۱	۳۰	۰٫۲۵۰۴	۰٫۲۵۸۶	۳٫۸۶۶۷	۰٫۹۶۸۱	۳۰	۱٫۳۱۷۷
۰٫۲۵۶۰	۴۰	۰٫۲۵۳۲	۰٫۲۶۱۷	۳٫۸۲۰۸	۰٫۹۶۷۴	۲۰	۱٫۳۱۴۸
۰٫۲۵۸۹	۵۰	۰٫۲۵۶۰	۰٫۲۶۴۸	۳٫۷۷۶۰	۰٫۹۶۶۷	۱۰	۱٫۳۱۱۹
۰٫۲۶۱۸	۱۵° ۰′	۰٫۲۵۸۸	۰٫۲۶۷۹	۳٫۷۳۲۱	۰٫۹۶۵۹	۷۵° ۰′	۱٫۳۰۹۰
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	راویان

رادیان	زنیه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰,۲۶۱۸	۱۵° ۰۰'	۰,۲۵۸۸	۰,۲۶۷۹	۳,۷۳۲۱	۰,۹۶۵۹	۷۵° ۰۰'	۱,۳۰۹۰
۰,۲۶۴۷	۱۰	۰,۲۶۱۶	۰,۲۷۱۱	۳,۶۸۹۱	۰,۹۶۵۲	۵۰	۱,۳۰۶۱
۰,۲۶۷۶	۲۰	۰,۲۶۴۴	۰,۲۷۴۲	۳,۶۴۷۰	۰,۹۶۴۴	۴۰	۱,۳۰۳۲
۰,۲۷۰۵	۳۰	۰,۲۶۷۲	۰,۲۷۷۳	۳,۶۰۵۹	۰,۹۶۳۶	۳۰	۱,۳۰۰۳
۰,۲۷۳۴	۴۰	۰,۲۷۰۰	۰,۲۸۰۵	۳,۵۶۵۶	۰,۹۶۲۸	۲۰	۱,۲۰۹۴
۰,۲۷۶۳	۵۰	۰,۲۷۲۸	۰,۲۸۳۶	۳,۵۲۶۱	۰,۹۶۲۱	۱۰	۱,۲۹۴۵
۰,۲۷۹۳	۱۶° ۰۰'	۰,۲۷۵۶	۰,۲۸۶۷	۳,۴۸۷۴	۰,۹۶۱۳	۷۴° ۰۰'	۱,۲۹۱۵
۰,۲۸۲۲	۱۰	۰,۲۷۸۴	۰,۲۸۹۹	۳,۴۴۹۵	۰,۹۶۰۵	۵۰	۱,۲۸۸۶
۰,۲۸۵۱	۲۰	۰,۲۸۱۲	۰,۲۹۳۱	۳,۴۱۲۴	۰,۹۵۹۶	۴۰	۱,۲۸۵۷
۰,۲۸۸۰	۳۰	۰,۲۸۴۰	۰,۲۹۶۲	۳,۳۷۵۹	۰,۹۵۸۸	۳۰	۱,۲۸۲۸
۰,۲۹۰۹	۴۰	۰,۲۸۶۸	۰,۲۹۹۴	۳,۳۴۰۲	۰,۹۵۸۰	۲۰	۱,۲۷۹۹
۰,۲۹۳۸	۵۰	۰,۲۸۹۶	۰,۳۰۲۶	۳,۳۰۵۲	۰,۹۵۷۲	۱۰	۱,۲۷۷۰
۰,۲۹۶۷	۱۷° ۰۰'	۰,۲۹۲۴	۰,۳۰۵۷	۳,۲۷۰۹	۰,۹۵۶۳	۷۳° ۰۰'	۱,۲۷۴۱
۰,۲۹۹۶	۱۰	۰,۲۹۵۲	۰,۳۰۸۹	۳,۲۳۷۱	۰,۹۵۵۵	۵۰	۱,۲۷۱۲
۰,۳۰۲۵	۲۰	۰,۲۹۷۹	۰,۳۱۲۱	۳,۲۰۴۱	۰,۹۵۴۶	۴۰	۱,۲۶۸۳
۰,۳۰۵۴	۳۰	۰,۳۰۰۷	۰,۳۱۵۳	۳,۱۷۱۶	۰,۹۵۳۷	۳۰	۱,۲۶۵۴
۰,۳۰۸۳	۴۰	۰,۳۰۳۵	۰,۳۱۸۵	۳,۱۳۹۸	۰,۹۵۲۸	۲	۱,۲۶۲۵
۰,۳۱۱۲	۵۰	۰,۳۰۶۲	۰,۳۲۱۷	۳,۱۰۸۴	۰,۹۵۲۰	۱۰	۱,۲۵۹۵
۰,۳۱۴۲	۱۸° ۰۰'	۰,۳۰۹۰	۰,۳۲۴۹	۳,۰۷۷۷	۰,۹۵۱۱	۷۲° ۰۰'	۱,۲۵۶۶
۰,۳۱۷۱	۱۰	۰,۳۱۱۸	۰,۳۲۸۱	۳,۰۴۷۵	۰,۹۵۰۲	۵۰	۱,۲۵۳۷
۰,۳۲۰۰	۲۰	۰,۳۱۴۵	۰,۳۳۱۴	۳,۰۱۷۸	۰,۹۴۹۲	۴۰	۱,۲۵۰۸
۰,۳۲۲۹	۳۰	۰,۳۱۷۳	۰,۳۳۴۶	۲,۹۸۸۷	۰,۹۴۸۳	۳۰	۱,۲۴۷۹
۰,۳۲۵۸	۴۰	۰,۳۲۰۱	۰,۳۳۷۸	۲,۹۶۰۰	۰,۹۴۷۴	۲۰	۱,۲۴۵۰
۰,۳۲۸۷	۵۰	۰,۳۲۲۸	۰,۳۴۱۱	۲,۹۳۱۹	۰,۹۴۶۵	۱۰	۱,۲۴۲۱
۰,۳۳۱۶	۱۹° ۰۰'	۰,۳۲۵۶	۰,۳۴۴۳	۲,۹۰۴۲	۰,۹۴۵۵	۷۱° ۰۰'	۱,۲۳۹۲
۰,۳۳۴۵	۱۰	۰,۳۲۸۳	۰,۳۴۷۶	۲,۸۷۷۰	۰,۹۴۴۶	۵۰	۱,۲۳۶۳
۰,۳۳۷۴	۲۰	۰,۳۳۱۱	۰,۳۵۰۸	۲,۸۵۰۲	۰,۹۴۳۶	۴۰	۱,۲۳۳۴
۰,۳۴۰۳	۳۰	۰,۳۳۳۸	۰,۳۵۴۱	۲,۸۲۳۹	۰,۹۴۲۶	۳۰	۱,۲۳۰۵
۰,۳۴۳۲	۴۰	۰,۳۳۶۵	۰,۳۵۷۴	۲,۷۹۸۰	۰,۹۴۱۷	۲۰	۱,۲۲۷۵
۰,۳۴۶۲	۵۰	۰,۳۳۹۳	۰,۳۶۰۷	۲,۷۷۲۵	۰,۹۴۰۷	۱۰	۱,۲۲۴۶
۰,۳۴۹۱	۲۰° ۰۰'	۰,۳۴۲۰	۰,۳۶۴۰	۲,۷۴۷۵	۰,۹۳۹۷	۷۰° ۰۰'	۱,۲۲۱۷
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زنیه	رادیان

رادیان	زینه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۳۴۹۱	۲۰° ۰′	۰٫۳۴۲۰	۰٫۳۶۴۰	۲٫۷۴۷۵	۰٫۹۳۹۷	۷۰° ۰′	۱٫۲۲۱۷
۰٫۳۵۲۰	۱۰	۰٫۳۴۴۸	۰٫۳۶۷۳	۲٫۷۲۲۸	۰٫۹۳۸۷	۵۰	۱٫۲۱۸۸
۰٫۳۵۴۹	۲۰	۰٫۳۴۷۵	۰٫۳۷۰۶	۲٫۶۹۸۵	۰٫۹۳۷۷	۴۰	۱٫۲۱۵۹
۰٫۳۵۷۸	۳۰	۰٫۳۵۰۲	۰٫۳۷۳۹	۲٫۶۷۴۶	۰٫۹۳۶۷	۳۰	۱٫۲۱۳۰
۰٫۳۶۰۷	۴۰	۰٫۳۵۲۹	۰٫۳۷۷۲	۲٫۶۵۱۱	۰٫۹۳۵۶	۲۰	۱٫۲۱۰۱
۰٫۳۶۳۶	۵۰	۰٫۳۵۵۷	۰٫۳۸۰۵	۲٫۶۲۷۹	۰٫۹۳۴۶	۱۰	۱٫۲۰۷۲
۰٫۳۶۶۵	۲۱° ۰′	۰٫۳۵۸۴	۰٫۳۸۳۹	۲٫۶۰۵۱	۰٫۹۳۳۶	۶۹° ۰′	۱٫۲۰۴۳
۰٫۳۶۹۴	۱۰	۰٫۳۶۱۱	۰٫۳۸۷۲	۲٫۵۸۲۶	۰٫۹۳۲۵	۵۰	۱٫۲۰۱۴
۰٫۳۷۲۳	۲۰	۰٫۳۶۳۸	۰٫۳۹۰۶	۲٫۵۶۰۵	۰٫۹۳۱۵	۴۰	۱٫۱۹۸۵
۰٫۳۷۵۲	۳۰	۰٫۳۶۶۵	۰٫۳۹۳۹	۲٫۵۳۸۶	۰٫۹۳۰۴	۳۰	۱٫۱۹۵۶
۰٫۳۷۸۲	۴۰	۰٫۳۶۹۲	۰٫۳۹۷۳	۲٫۵۱۷۲	۰٫۹۲۹۳	۲۰	۱٫۱۹۲۶
۰٫۳۸۱۱	۵۰	۰٫۳۷۱۹	۰٫۴۰۰۶	۲٫۴۹۶۰	۰٫۹۲۸۳	۱۰	۱٫۱۸۹۷
۰٫۳۸۴۰	۲۲° ۰′	۰٫۳۷۴۶	۰٫۴۰۴۰	۲٫۴۷۵۱	۰٫۹۲۷۲	۶۸° ۰′	۱٫۱۸۶۸
۰٫۳۸۶۹	۱۰	۰٫۳۷۷۳	۰٫۴۰۷۴	۲٫۴۵۴۵	۰٫۹۲۶۱	۵۰	۱٫۱۸۳۹
۰٫۳۸۹۸	۲۰	۰٫۳۸۰۰	۰٫۴۱۰۸	۲٫۴۳۴۲	۰٫۹۲۵۰	۴۰	۱٫۱۸۱۰
۰٫۳۹۲۷	۳۰	۰٫۳۸۲۷	۰٫۴۱۴۲	۲٫۴۱۴۲	۰٫۹۲۳۹	۳۰	۱٫۱۷۸۱
۰٫۳۹۵۶	۴۰	۰٫۳۸۵۴	۰٫۴۱۷۶	۲٫۳۹۴۵	۰٫۹۲۲۸	۲۰	۱٫۱۷۵۲
۰٫۳۹۸۵	۵۰	۰٫۳۸۸۱	۰٫۴۲۱۰	۲٫۳۷۵۰	۰٫۹۲۱۶	۱۰	۱٫۱۷۲۳
۰٫۴۰۱۴	۲۳° ۰′	۰٫۳۹۰۷	۰٫۴۲۴۵	۲٫۳۵۵۹	۰٫۹۲۰۵	۶۷° ۰′	۱٫۱۶۹۴
۰٫۴۰۴۳	۱۰	۰٫۳۹۳۴	۰٫۴۲۷۹	۲٫۳۳۶۹	۰٫۹۱۹۴	۵۰	۱٫۱۶۶۵
۰٫۴۰۷۲	۲۰	۰٫۳۹۶۱	۰٫۴۳۱۴	۲٫۳۱۸۳	۰٫۹۱۸۲	۴۰	۱٫۱۶۳۶
۰٫۴۱۰۲	۳۰	۰٫۳۹۸۷	۰٫۴۳۴۸	۲٫۲۹۹۸	۰٫۹۱۷۱	۳۰	۱٫۱۶۰۶
۰٫۴۱۳۱	۴۰	۰٫۴۰۱۴	۰٫۴۳۸۳	۲٫۲۸۱۷	۰٫۹۱۵۹	۲۰	۱٫۱۵۷۷
۰٫۴۱۶۰	۵۰	۰٫۴۰۴۱	۰٫۴۴۱۷	۲٫۲۶۳۷	۰٫۹۱۴۷	۱۰	۱٫۱۵۴۸
۰٫۴۱۸۹	۲۴° ۰′	۰٫۴۰۶۷	۰٫۴۴۵۲	۲٫۲۴۶۰	۰٫۹۱۳۵	۶۶° ۰′	۱٫۱۵۱۹
۰٫۴۲۱۸	۱۰	۰٫۴۰۹۳	۰٫۴۴۸۷	۲٫۲۲۸۶	۰٫۹۱۲۴	۵۰	۱٫۱۴۹۰
۰٫۴۲۴۷	۲۰	۰٫۴۱۲۰	۰٫۴۵۲۲	۲٫۲۱۱۳	۰٫۹۱۱۲	۴۰	۱٫۱۴۶۱
۰٫۴۲۷۶	۳۰	۰٫۴۱۴۷	۰٫۴۵۵۷	۲٫۱۹۴۳	۰٫۹۱۰۰	۳۰	۱٫۱۴۳۲
۰٫۴۳۰۵	۴۰	۰٫۴۱۷۳	۰٫۴۵۹۲	۲٫۱۷۷۵	۰٫۹۰۸۸	۲۰	۱٫۱۴۰۳
۰٫۴۳۳۴	۵۰	۰٫۴۲۰۰	۰٫۴۶۲۸	۲٫۱۶۰۹	۰٫۹۰۷۵	۱۰	۱٫۱۳۷۴
۰٫۴۳۶۳	۲۵° ۰′	۰٫۴۲۲۶	۰٫۴۶۶۳	۲٫۱۴۴۵	۰٫۹۰۶۳	۶۵° ۰′	۱٫۱۳۴۵
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	رادیان

رادیان	زینه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۴۳۶۳	۲۵° ۰۰′	۰٫۴۲۲۶	۰٫۴۶۶۳	۲٫۱۴۴۵	۰٫۹۰۶۳	۶۵° ۰۰′	۱٫۱۳۴۵
۰٫۴۳۶۲	۱۰	۰٫۴۲۵۳	۰٫۴۶۹۹	۲٫۱۲۸۳	۰٫۹۰۵۱	۵۰	۱٫۱۳۱۶
۰٫۴۴۲۲	۲۰	۰٫۴۲۷۹	۰٫۴۷۳۴	۲٫۱۱۲۳	۰٫۹۰۳۸	۴۰	۱٫۱۲۸۶
۰٫۴۴۵۱	۳۰	۰٫۴۳۰۵	۰٫۴۷۷۰	۲٫۰۹۶۵	۰٫۹۰۲۶	۳۰	۱٫۱۲۵۷
۰٫۴۴۸۰	۴۰	۰٫۴۳۳۱	۰٫۴۸۰۶	۲٫۰۸۰۹	۰٫۹۰۱۳	۲۰	۱٫۱۲۲۸
۰٫۴۵۰۹	۵۰	۰٫۴۳۵۸	۰٫۴۸۴۱	۲٫۰۶۵۵	۰٫۹۰۰۱	۱۰	۱٫۱۱۹۹
۰٫۴۵۳۸	۲۶° ۰۰′	۰٫۴۳۸۴	۰٫۴۸۷۷	۲٫۰۵۰۳	۰٫۸۹۸۸	۶۴° ۰۰′	۱٫۱۱۷۰
۰٫۴۵۶۷	۱۰	۰٫۴۴۱۰	۰٫۴۹۱۳	۲٫۰۳۵۳	۰٫۸۹۷۵	۵۰	۱٫۱۱۴۱
۰٫۴۵۹۶	۲۰	۰٫۴۴۳۶	۰٫۴۹۵۰	۲٫۰۲۰۴	۰٫۸۹۶۲	۴۰	۱٫۱۱۱۲
۰٫۴۶۲۵	۳۰	۰٫۴۴۶۲	۰٫۴۹۸۶	۲٫۰۰۵۷	۰٫۸۹۴۹	۳۰	۱٫۱۰۸۳
۰٫۴۶۵۴	۴۰	۰٫۴۴۸۸	۰٫۵۰۲۲	۱٫۹۹۱۲	۰٫۸۹۳۶	۲۰	۱٫۱۰۵۴
۰٫۴۶۸۳	۵۰	۰٫۴۵۱۴	۰٫۵۰۵۹	۱٫۹۷۶۸	۰٫۸۹۲۳	۱۰	۱٫۱۰۲۵
۰٫۴۷۱۲	۲۷° ۰۰′	۰٫۴۵۴۰	۰٫۵۰۹۵	۱٫۹۶۲۶	۰٫۸۹۱۰	۶۳° ۰۰′	۱٫۰۹۹۶
۰٫۴۷۴۱	۱۰	۰٫۴۵۶۶	۰٫۵۱۳۲	۱٫۹۴۸۶	۰٫۸۸۹۷	۵۰	۱٫۰۹۶۶
۰٫۴۷۷۱	۲۰	۰٫۴۵۹۲	۰٫۵۱۶۹	۱٫۹۳۴۷	۰٫۸۸۸۴	۴۰	۱٫۰۹۳۷
۰٫۴۸۰۰	۳۰	۰٫۴۶۱۷	۰٫۵۲۰۶	۱٫۹۲۱۰	۰٫۸۸۷۰	۳۰	۱٫۰۹۰۸
۰٫۴۸۲۹	۴۰	۰٫۴۶۴۳	۰٫۵۲۴۳	۱٫۹۰۷۴	۰٫۸۸۵۷	۲۰	۱٫۰۸۷۹
۰٫۴۸۵۸	۵۰	۰٫۴۶۶۹	۰٫۵۲۸۰	۱٫۸۹۴۰	۰٫۸۸۴۳	۱۰	۱٫۰۸۵۰
۰٫۴۸۸۷	۲۸° ۰۰′	۰٫۴۶۹۵	۰٫۵۳۱۷	۱٫۸۸۰۷	۰٫۸۸۲۹	۶۲° ۰۰′	۱٫۰۸۲۱
۰٫۴۹۱۶	۱۰	۰٫۴۷۲۰	۰٫۵۳۵۴	۱٫۸۶۷۶	۰٫۸۸۱۶	۵۰	۱٫۰۷۹۲
۰٫۴۹۴۵	۲۰	۰٫۴۷۴۶	۰٫۵۳۹۲	۱٫۸۵۴۶	۰٫۸۸۰۲	۴۰	۱٫۰۷۶۳
۰٫۴۹۷۴	۳۰	۰٫۴۷۷۲	۰٫۵۴۳۰	۱٫۸۴۱۸	۰٫۸۷۸۸	۳۰	۱٫۰۷۳۴
۰٫۵۰۰۳	۴۰	۰٫۴۷۹۷	۰٫۵۴۶۷	۱٫۸۲۹۱	۰٫۸۷۷۴	۲۰	۱٫۰۷۰۵
۰٫۵۰۳۲	۵۰	۰٫۴۸۲۳	۰٫۵۵۰۵	۱٫۸۱۶۵	۰٫۸۷۶۰	۱۰	۱٫۰۶۷۶
۰٫۵۰۶۱	۲۹° ۰۰′	۰٫۴۸۴۸	۰٫۵۵۴۳	۱٫۸۰۴۰	۰٫۸۷۴۶	۶۱° ۰۰′	۱٫۰۶۴۷
۰٫۵۰۹۱	۱۰	۰٫۴۸۷۴	۰٫۵۵۸۱	۱٫۷۹۱۷	۰٫۸۷۳۲	۵۰	۱٫۰۶۱۷
۰٫۵۱۲۰	۲۰	۰٫۴۸۹۹	۰٫۵۶۱۹	۱٫۷۷۹۶	۰٫۸۷۱۸	۴۰	۱٫۰۵۸۸
۰٫۵۱۴۹	۳۰	۰٫۴۹۲۴	۰٫۵۶۵۸	۱٫۷۶۷۵	۰٫۸۷۰۴	۳۰	۵۵۹
۰٫۵۱۷۸	۴۰	۰٫۴۹۵۰	۰٫۵۶۹۶	۱٫۷۵۵۶	۰٫۸۶۸۹	۲۰	۱٫۰۵۳۰
۰٫۵۲۰۷	۵۰	۰٫۴۹۷۵	۰٫۵۷۳۵	۱٫۷۴۳۷	۰٫۸۶۷۵	۱۰	۱٫۰۵۰۱
۰٫۵۲۳۶	۳۰° ۰۰′	۰٫۵۰۰۰	۰٫۵۷۷۴	۱٫۷۳۲۱	۰٫۸۶۶۰	۶۰° ۰۰′	۱٫۰۴۷۲
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	رادیان

رادیان	زینه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۵۲۳۶	۳۰° ۰۰	۰٫۵۰۰۰	۰٫۵۷۷۴	۱٫۷۳۲۱	۰٫۸۶۶۰	۶۰° ۰۰	۱٫۰۴۷۲
۰٫۵۲۶۵	۱۰	۰٫۵۰۲۵	۰٫۵۸۱۲	۱٫۷۲۰۵	۰٫۸۶۴۶	۵۰	۱٫۰۴۴۳
۰٫۵۲۹۴	۲۰	۰٫۵۰۵۰	۰٫۵۸۵۱	۱٫۷۰۹۰	۰٫۸۶۳۱	۴۰	۱٫۰۴۱۴
۰٫۵۳۲۳	۳۰	۰٫۵۰۷۵	۰٫۵۸۹۰	۱٫۶۹۷۷	۰٫۸۶۱۶	۳۰	۱٫۰۳۸۵
۰٫۵۳۵۲	۴۰	۰٫۵۱۰۰	۰٫۵۹۳۰	۱٫۶۸۶۴	۰٫۸۶۰۱	۲۰	۱٫۰۳۵۶
۰٫۵۳۸۱	۵۰	۰٫۵۱۲۵	۰٫۵۹۶۹	۱٫۶۷۵۳	۰٫۸۵۸۷	۱۰	۱٫۰۳۲۷
۰٫۵۴۱۱	۳۱° ۰۰	۰٫۵۱۵۰	۰٫۶۰۰۹	۱٫۶۶۴۳	۰٫۸۵۷۲	۵۹° ۰۰	۱٫۰۲۹۷
۰٫۵۴۴۰	۱۰	۰٫۵۱۷۵	۰٫۶۰۴۸	۱٫۶۵۳۴	۰٫۸۵۵۷	۵۰	۱٫۰۲۶۸
۰٫۵۴۶۹	۲۰	۰٫۵۲۰۰	۰٫۶۰۸۸	۱٫۶۴۲۶	۰٫۸۵۴۲	۴۰	۱٫۰۲۳۹
۰٫۵۴۹۸	۳۰	۰٫۵۲۲۵	۰٫۶۱۲۸	۱٫۶۳۱۹	۰٫۸۵۲۶	۳۰	۱٫۰۲۱۰
۰٫۵۵۲۷	۴۰	۰٫۵۲۵۰	۰٫۶۱۶۸	۱٫۶۲۱۲	۰٫۸۵۱۱	۲۰	۱٫۰۱۸۱
۰٫۵۵۵۶	۵۰	۰٫۵۲۷۵	۰٫۶۲۰۸	۱٫۶۱۰۷	۰٫۸۴۹۶	۱۰	۱٫۰۱۵۲
۰٫۵۵۸۵	۳۲° ۰۰	۰٫۵۲۹۹	۰٫۶۲۴۹	۱٫۶۰۰۳	۰٫۸۴۸۰	۵۸° ۰۰	۱٫۰۱۲۳
۰٫۵۶۱۴	۱۰	۰٫۵۳۲۴	۰٫۶۲۸۹	۱٫۵۹۰۰	۰٫۸۴۶۵	۵۰	۱٫۰۰۹۴
۰٫۵۶۴۳	۲۰	۰٫۵۳۴۸	۰٫۶۳۳۰	۱٫۵۷۹۸	۰٫۸۴۵۰	۴۰	۱٫۰۰۶۵
۰٫۵۶۷۲	۳۰	۰٫۵۳۷۳	۰٫۶۳۷۱	۱٫۵۶۹۷	۰٫۸۴۳۴	۳۰	۱٫۰۰۳۶
۰٫۵۷۰۱	۴۰	۰٫۵۳۹۸	۰٫۶۴۱۲	۱٫۵۵۹۷	۰٫۸۴۱۸	۲۰	۱٫۰۰۰۷
۰٫۵۷۳۰	۵۰	۰٫۵۴۲۲	۰٫۶۴۵۳	۱٫۵۴۹۷	۰٫۸۴۰۳	۱۰	۰٫۹۹۷۷
۰٫۵۷۶۰	۳۳° ۰۰	۰٫۵۴۴۶	۰٫۶۴۹۴	۱٫۵۳۹۹	۰٫۸۳۸۷	۵۷ ۰۰	۰٫۹۹۴۸
۰٫۵۷۸۹	۱۰	۰٫۵۴۷۱	۰٫۶۵۳۶	۱٫۵۳۰۱	۰٫۸۳۷۱	۵۰	۰٫۹۹۱۹
۰٫۵۸۱۸	۲۰	۰٫۵۴۹۵	۰٫۶۵۷۷	۱٫۵۲۰۴	۰٫۸۳۵۵	۴۰	۰٫۹۸۹۰
۰٫۵۸۴۷	۳۰	۰٫۵۵۱۹	۰٫۶۶۱۹	۱٫۵۱۰۸	۰٫۸۳۳۹	۳۰	۰٫۹۸۶۱
۰٫۵۸۷۶	۴۰	۰٫۵۵۴۴	۰٫۶۶۶۱	۱٫۵۰۱۳	۰٫۸۳۲۳	۲۰	۰٫۹۸۳۲
۰٫۵۹۰۵	۵۰	۰٫۵۵۶۸	۰٫۶۷۰۳	۱٫۴۹۱۹	۰٫۸۳۰۷	۱۰	۰٫۹۸۰۳
۰٫۵۹۳۴	۳۴° ۰۰	۰٫۵۵۹۲	۰٫۶۷۴۵	۱٫۴۸۲۶	۰٫۸۲۹۰	۵۶° ۰۰	۰٫۹۷۷۴
۰٫۵۹۶۳	۱۰	۰٫۵۶۱۶	۰٫۶۷۸۷	۱٫۴۷۳۳	۰٫۸۲۷۴	۵۰	۰٫۹۷۴۵
۰٫۵۹۹۲	۲۰	۰٫۵۶۴۰	۰٫۶۸۳۰	۱٫۴۶۴۱	۰٫۸۲۵۸	۴۰	۰٫۹۷۱۶
۰٫۶۰۲۱	۳۰	۰٫۵۶۶۴	۰٫۶۸۷۳	۱٫۴۵۵۰	۰٫۸۲۴۱	۳۰	۰٫۹۶۸۷
۰٫۶۰۵۰	۴۰	۰٫۵۶۸۸	۰٫۶۹۱۶	۱٫۴۴۶۰	۰٫۸۲۲۵	۲۰	۰٫۹۶۵۷
۰٫۶۰۸۰	۵۰	۰٫۵۷۱۲	۰٫۶۹۵۹	۱٫۴۳۷۰	۰٫۸۲۰۸	۱۰	۰٫۹۶۲۸
۰٫۶۱۰۹	۳۵° ۰۰	۰٫۵۷۳۶	۰٫۷۰۰۲	۱٫۴۲۸۱	۰٫۸۱۹۲	۵۵ ۰۰	۰٫۹۵۹۹
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	رادیان

رادیان	زینه	سینوس	تانژانت	تانژانت متمم	سینوس متمم		
۰٫۶۱۰۹	۳۵° ۰۰	۰٫۵۷۳۶	۰٫۷۰۰۲	۱٫۴۲۸۱	۰٫۸۱۹۲	۵۵° ۰۰	۰٫۹۵۹۹
۰٫۶۱۳۸	۱۰	۰٫۵۷۶۰	۰٫۷۰۴۶	۱٫۴۱۹۳	۰٫۸۱۷۵	۵۰	۰٫۹۵۷۰
۰٫۶۱۶۷	۲۰	۰٫۵۷۸۳	۰٫۷۰۸۹	۱٫۴۱۰۶	۰٫۸۱۵۸	۴۰	۰٫۹۵۴۱
۰٫۶۱۹۶	۳۰	۰٫۵۸۰۷	۰٫۷۱۳۳	۱٫۴۰۱۹	۰٫۸۱۴۱	۳۰	۰٫۹۵۱۲
۰٫۶۲۲۵	۴۰	۰٫۵۸۳۱	۰٫۷۱۷۷	۱٫۳۹۳۴	۰٫۸۱۲۴	۲۰	۰٫۹۴۸۳
۰٫۶۲۵۴	۵۰	۰٫۵۸۵۴	۰٫۷۲۲۱	۱٫۳۸۴۸	۰٫۸۱۰۷	۱۰	۰٫۹۴۵۴
۰٫۶۲۸۳	۳۶° ۰۰	۰٫۵۸۷۸	۰٫۷۲۶۵	۱٫۳۷۶۴	۰٫۸۰۹۰	۵۴° ۰۰	۰٫۹۴۲۵
۰٫۶۳۱۲	۱۰	۰٫۵۹۰۱	۰٫۷۳۱۰	۱٫۳۶۸۰	۰٫۸۰۷۳	۵۰	۰٫۹۳۹۶
۰٫۶۳۴۱	۲۰	۰٫۵۹۲۵	۰٫۷۳۵۵	۱٫۳۵۹۷	۰٫۸۰۵۶	۴۰	۰٫۹۳۶۷
۰٫۶۳۷۰	۳۰	۰٫۵۹۴۸	۰٫۷۴۰۰	۱٫۳۵۱۴	۰٫۸۰۳۹	۳۰	۰٫۹۳۳۸
۰٫۶۴۰۰	۴۰	۰٫۵۹۷۲	۰٫۷۴۴۵	۱٫۳۴۳۲	۰٫۸۰۲۱	۲۰	۰٫۹۳۰۸
۰٫۶۴۲۹	۵۰	۰٫۵۹۹۵	۰٫۷۴۹۰	۱٫۳۳۵۱	۰٫۸۰۰۴	۱۰	۰٫۹۲۷۹
۰٫۶۴۵۸	۳۷° ۰۰	۰٫۶۰۱۸	۰٫۷۵۳۶	۱٫۳۲۷۰	۰٫۷۹۸۶	۵۳° ۰۰	۰٫۹۲۵۰
۰٫۶۴۸۷	۱۰	۰٫۶۰۴۱	۰٫۷۵۸۱	۱٫۳۱۹۰	۰٫۷۹۶۹	۵۰	۰٫۹۲۲۱
۰٫۶۵۱۶	۲۰	۰٫۶۰۶۵	۰٫۷۶۲۷	۱٫۳۱۱۱	۰٫۷۹۵۱	۴۰	۰٫۹۱۹۲
۰٫۶۵۴۵	۳۰	۰٫۶۰۸۸	۰٫۷۶۷۳	۱٫۳۰۳۲	۰٫۷۹۳۴	۳۰	۰٫۹۱۶۳
۰٫۶۵۷۴	۴۰	۰٫۶۱۱۱	۰٫۷۷۲۰	۱٫۲۹۵۴	۰٫۷۹۱۶	۲۰	۰٫۹۱۳۴
۰٫۶۶۰۳	۵۰	۰٫۶۱۳۴	۰٫۷۷۶۶	۱٫۲۸۷۶	۰٫۷۸۹۸	۱۰	۰٫۹۱۰۵
۰٫۶۶۳۲	۳۸° ۰۰	۰٫۶۱۵۷	۰٫۷۸۱۳	۱٫۲۷۹۹	۰٫۷۸۸۰	۵۲° ۰۰	۰٫۹۰۷۶
۰٫۶۶۶۱	۱۰	۰٫۶۱۸۰	۰٫۷۸۶۰	۱٫۲۷۲۳	۰٫۷۸۶۲	۵۰	۰٫۹۰۴۷
۰٫۶۶۹۰	۲۰	۰٫۶۲۰۲	۰٫۷۹۰۷	۱٫۲۶۴۷	۰٫۷۸۴۳	۴۰	۰٫۹۰۱۸
۰٫۶۷۲۰	۳۰	۰٫۶۲۲۵	۰٫۷۹۵۴	۱٫۲۵۷۲	۰٫۷۸۲۶	۳۰	۰٫۸۹۸۸
۰٫۶۷۴۹	۴۰	۰٫۶۲۴۸	۰٫۸۰۰۲	۱٫۲۴۹۷	۰٫۷۸۰۸	۲۰	۰٫۸۹۵۹
۰٫۶۷۷۸	۵۰	۰٫۶۲۷۱	۰٫۸۰۵۰	۱٫۲۴۲۳	۰٫۷۷۹۰	۱۰	۰٫۸۹۳۰
۰٫۶۸۰۷	۳۹° ۰۰	۰٫۶۲۹۳	۰٫۸۰۹۸	۱٫۲۳۴۹	۰٫۷۷۷۱	۵۱° ۰۰	۰٫۸۹۰۱
۰٫۶۸۳۶	۱۰	۰٫۶۳۱۶	۰٫۸۱۴۶	۱٫۲۲۷۶	۰٫۷۷۵۳	۵۰	۰٫۸۸۷۲
۰٫۶۸۶۵	۲۰	۰٫۶۳۳۸	۰٫۸۱۹۵	۱٫۲۲۰۳	۰٫۷۷۳۵	۴۰	۰٫۸۸۴۳
۰٫۶۸۹۴	۳۰	۰٫۶۳۶۱	۰٫۸۲۴۳	۱٫۲۱۳۱	۰٫۷۷۱۶	۳۰	۰٫۸۸۱۴
۰٫۶۹۲۳	۴۰	۰٫۶۳۸۳	۰٫۸۲۹۲	۱٫۲۰۵۹	۰٫۷۶۹۸	۲۰	۰٫۸۷۸۵
۰٫۶۹۵۲	۵۰	۰٫۶۴۰۶	۰٫۸۳۴۲	۱٫۱۹۸۸	۰٫۷۶۷۹	۱۰	۰٫۸۷۵۶
۰٫۶۹۸۱	۴۰° ۰۰	۰٫۶۴۲۸	۰٫۸۳۹۱	۱٫۱۹۱۸	۰٫۷۶۶۰	۵۰° ۰۰	۰٫۸۷۲۷
		سینوس متمم	تانژانت متمم	تانژانت	سینوس	زینه	رادیان

					تانژانت	سینوس	زاویه	رادیان
					۰٫۸۳۹۱	۰٫۶۴۲۸	۴۰° ۰۰	۰٫۶۹۸۱
					۰٫۸۴۴۱	۰٫۶۴۵۰	۱۰	۰٫۷۰۱۰
					۰٫۸۴۹۱	۰٫۶۴۷۲	۲۰	۰٫۷۰۳۹
					۰٫۸۵۴۱	۰٫۶۴۹۴	۳۰	۰٫۷۰۶۹
					۰٫۸۵۹۱	۰٫۶۵۱۷	۴۰	۰٫۷۰۹۸
					۰٫۸۶۴۲	۰٫۶۵۳۹	۵۰	۰٫۷۱۲۷
					۰٫۸۶۹۳	۰٫۶۵۶۱	۴۱° ۰۰	۰٫۷۱۵۶
					۰٫۸۷۴۴	۰٫۶۵۸۳	۱۰	۰٫۷۱۸۵
					۰٫۸۷۹۶	۰٫۶۶۰۴	۲۰	۰٫۷۲۱۴
					۰٫۸۸۴۷	۰٫۶۶۲۶	۳۰	۰٫۷۲۴۳
					۰٫۸۸۹۹	۰٫۶۶۴۸	۴۰	۰٫۷۲۷۲
					۰٫۸۹۵۲	۰٫۶۶۷۰	۵۰	۰٫۷۳۰۱
					۰٫۹۰۰۴	۰٫۶۶۹۱	۴۲° ۰۰	۰٫۷۳۳۰
					۰٫۹۰۵۷	۰٫۶۷۱۳	۱۰	۰٫۷۳۵۹
					۰٫۹۱۱۰	۰٫۶۷۳۴	۲۰	۰٫۷۳۸۹
۰٫۸۲۹۰	۳۰	۰٫۷۳۷۳	۱٫۰۹۱۳		۰٫۹۱۶۳	۰٫۶۷۵۶	۳۰	۰٫۷۴۱۸
۰٫۸۲۶۱	۲۰	۰٫۷۳۵۳	۱٫۰۸۵۰		۰٫۹۲۱۷	۰٫۶۷۷۷	۴۰	۰٫۷۴۴۷
۰٫۸۲۳۲	۱۰	۰٫۷۳۳۳	۱٫۰۷۸۶		۰٫۹۲۷۱	۰٫۶۷۹۹	۵۰	۰٫۷۴۷۶
۰٫۸۲۰۳	۴۷° ۰۰	۰٫۷۳۱۴	۱٫۰۷۲۴		۰٫۹۳۲۵	۰٫۶۸۲۰	۴۳° ۰۰	۰٫۷۵۰۵
۰٫۸۱۷۴	۵۰	۰٫۷۲۹۴	۱٫۰۶۶۱		۰٫۹۳۸۰	۰٫۶۸۴۱	۱۰	۰٫۷۵۳۴
۰٫۸۱۴۵	۴۰	۰٫۷۲۷۴	۱٫۰۵۹۹		۰٫۹۴۳۵	۰٫۶۸۶۲	۲۰	۰٫۱۵۶۴
۰٫۸۱۱۶	۳۰	۰٫۷۲۵۴	۱٫۰۵۳۸		۰٫۹۴۹۰	۰٫۶۸۸۴	۳۰	۰٫۷۵۹۳
۰٫۸۰۸۷	۲۰	۰٫۷۲۳۴	۱٫۰۴۷۷		۰٫۹۵۴۵	۰٫۶۹۰۵	۴۰	۰٫۷۶۲۱
۰٫۸۰۵۸	۱۰	۰٫۷۲۱۴	۱٫۰۴۱۶		۰٫۹۶۰۱	۰٫۶۹۲۶	۵۰	۰٫۷۶۵۰
۰٫۸۰۲۹	۴۶° ۰۰	۰٫۷۱۹۳	۱٫۰۳۵۵		۰٫۹۶۵۷	۰٫۶۹۴۷	۴۴° ۰۰	۰٫۷۶۷۹
۰٫۷۹۹۹	۵۰	۰٫۷۱۷۳	۱٫۰۲۹۵		۰٫۹۷۱۳	۰٫۶۹۶۷	۱۰	۰٫۷۷۰۹
۰٫۷۹۷۰	۴۰	۰٫۷۱۵۳	۱٫۰۲۳۵		۰٫۹۷۷۰	۰٫۶۹۸۸	۲۰	۰٫۷۷۳۸
۰٫۷۹۴۱	۳۰	۰٫۷۱۳۳	۱٫۰۱۷۶		۰٫۹۸۲۷	۰٫۷۰۰۹	۳۰	۰٫۷۷۶۷
۰٫۷۹۱۲	۲۰	۰٫۷۱۱۲	۱٫۰۱۱۷		۰٫۹۸۸۴	۰٫۷۰۳۰	۴۰	۰٫۷۷۹۶
۰٫۷۸۸۳	۱۰	۰٫۷۰۹۲	۱٫۰۰۵۸		۰٫۹۹۴۲	۰٫۷۰۵۰	۵۰	۰٫۷۸۲۵
۰٫۷۸۵۴	۴۵° ۰۰	۰٫۷۰۷۱	۱٫۰۰۰۰		۱٫۰۰۰۰	۰٫۷۰۷۱	۴۵° ۰۰	۰٫۷۸۵۴
رادیان	زاویه	سینوس	تانژانت		تانژانت متمم	سینوس متمم		

بخط محمد فضلعلی گراور حبیب‌الله رایج خواه